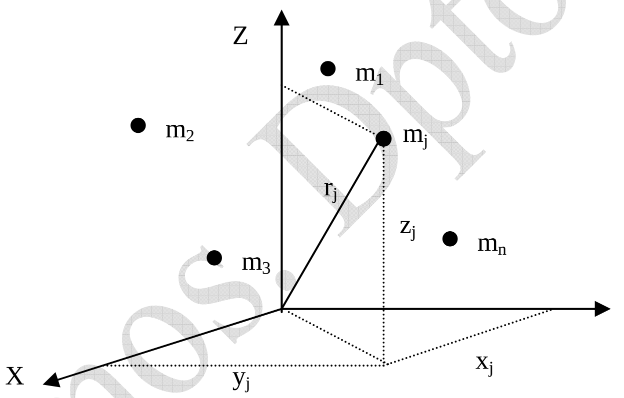
CENTRO DE GRAVEDAD

El estudio del movimiento de un sistema constituido por un número muy elevado de partículas, como es el caso de un sólido, es muy complejo. El estudio se puede simplificar considerando un punto (**denominado centro de gravedad**) en el que se considera que está aplicada la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre él (peso total del sistema). La posición del centro de gravedad viene determinada por las coordenadas promedio de las masas que componen el sistema.

El centro de gravedad de un sistema discreto constituido por n masas (m_1, m_2, …m_j,…m_n) cuyas coordenadas respecto a un sistema de referencia OXYZ son (x_1, y_1, z_1), ...(x_n, y_n, z_n) es el punto del espacio en el que se tendría que situar el peso total del sistema, obteniéndose un sistema equivalente al inicial, es decir que la resultante de las fuerzas aplicadas (pesos) y su momento resultante sean equivalentes



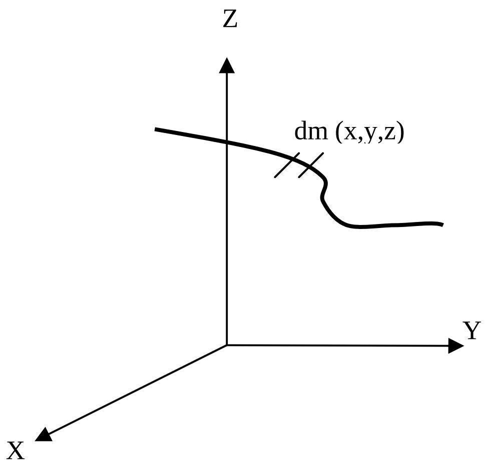
$$\vec{P} = M\vec{g} = m_1\vec{g} + m_2\vec{g} + ... + m_n\vec{g} = (m_1 + m_2 + ... + m_n)\vec{g}$$

$$\vec{r}_G \wedge M\vec{g} = \vec{r}_1 \wedge m_1\vec{g} + \vec{r}_2 \wedge m_2\vec{g} + ... + \vec{r}_n \wedge m_n\vec{g}$$

de donde $M\vec{r}_G = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i$ o bien $\vec{r}_G = \dfrac{m_1\vec{r}_1 + ... + m_n\vec{r}_n}{m_1 + ...m_n} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i}{M}$

por tanto, las coordenadas de dicho punto se calculan mediante las expresiones

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{M}, \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{M}, \quad z_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{M}$$



En el caso de que el sistema no sea discreto sino que la masa esté distribuida a lo largo de todo el sistema, se considera un elemento diferencial de masa *dm* en un punto de coordenadas (*x,y,z*), de forma que las coordenadas del centro de gravedad se calculan mediante las expresiones

$$x_G = \frac{\int xdm}{M}, \quad y_G = \frac{\int ydm}{M}, \quad z_G = \frac{\int zdm}{M}$$

Si se trata de una superficie o un volumen, las integrales están extendidas a toda la superficie o todo el volumen (integrales doble y triple respectivamente)

Centros de gravedad de las figuras homogéneas

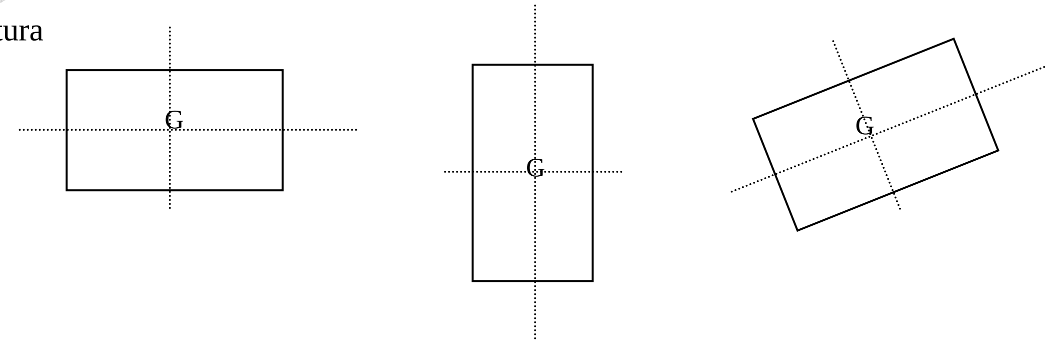
Las figuras homogéneas se caracterizan porque su densidad es constante. Si la figura es una curva, la densidad lineal es $\lambda = \frac{dm}{dl}$ y la masa del elemento diferencial de longitud es $dm = \lambda dl$. La integración de *dm* a lo largo de la curva completa, teniendo en cuenta que la densidad lineal es constante, proporciona su masa, esto es $M = \int_L dm = \int_L \lambda dl = \lambda \int_L dl = \lambda L$.

De idéntica forma, si la figura es una superficie homogénea su densidad superficial es $\sigma = \frac{dm}{dA}$ y la masa del elemento diferencial de área es $dm = \lambda dA$. La integración de *dm* extendida a la superficie completa, teniendo en cuenta que la densidad superficial es constante, proporciona su masa, esto es $M = \iint_A dm = \iint_A \sigma dA = \sigma \iint_A dA = \sigma A$ ..

Si la figura es un volumen homogéneo la densidad volumétrica $\rho = \frac{dm}{dV}$ es constante y la masa de toda la figura completa es $M = \iiint_V dm = \iiint_V \rho dV = \rho \iiint_V dV = \rho V$

- Si la figura tiene un eje de simetría, el centro de gravedad está sobre el eje, y si tiene un plano de simetría el centro de gravedad está sobre el plano.

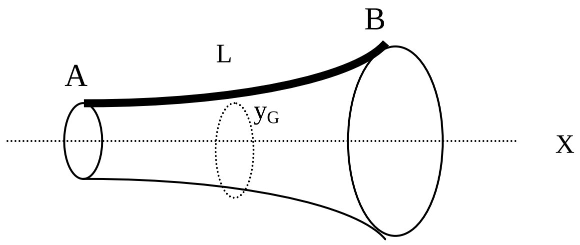
- La posición del centro de gravedad es única, independiente de la orientación del sistema y del sistema de referencia elegido; por ejemplo, el centro de gravedad de un rectángulo homogéneo está situado en su centro geométrico, es decir en la mitad de su base y la mitad de su altura



Teoremas de Guldin

Los teoremas de Guldin se utilizan para determinar el centro de gravedad de curvas y superficies planas homogéneas de las que se conoce la superficie y volumen de revolución respectivos que generan al girar en torno a un eje contenido en su plano.

Teorema 1. *El área A de la superficie de revolución generada al girar una curva plana homogénea de longitud L alrededor de un eje coplanario con ella y que no la corte, es igual al producto de la longitud de la curva por la longitud de la circunferencia que describe el centro de gravedad al girar.*



El área generada al girar la curva AB al girar en torno al eje X es A, y el centro de gravedad describe una circunferencia de longitud $2\pi y_G$, de donde $A = L2\pi y_G$ y por tanto $y_G = \dfrac{A}{2\pi L}$

Teorema 2. *El volumen del sólido de revolución generado al hacer girar una superficie plana homogénea de área A alrededor de un eje coplanario y que no la corta, es igual al producto del área de dicha superficie por la longitud de la circunferencia que describe el centro de gravedad al girar.*

El volumen engendrado al girar la superficie en torno al eje X es V, y el centro de gravedad describe una circunferencia de longitud $2\pi y_G$, de donde $V = A2\pi y_G$ y por tanto $y_G = \dfrac{V}{2\pi A}$