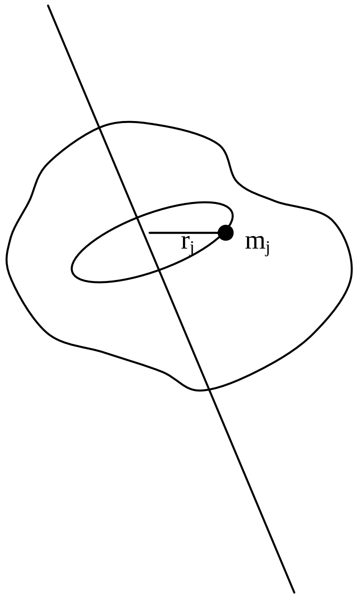
MOMENTO DE INERCIA

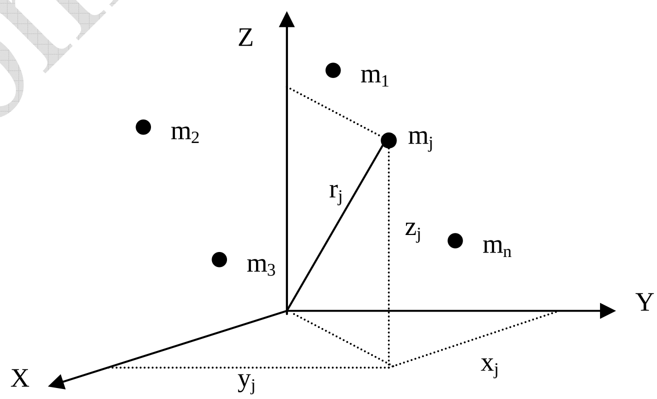


El concepto de momento de inercia surge a partir del estudio de un sistema en rotación en torno a un eje E. Todos los puntos del sistema giran con la misma velocidad angular ω y describen circunferencias en planos perpendiculares al eje y cuyo centro es un punto del eje. Considerando un punto genérico j del sistema, de masa m_j, este describe una circunferencia de radio r_j siendo el módulo v_j el módulo de su velocidad $v_j=\omega r_j$. Por tanto la energía cinética del sistema, suma de las energías cinéticas de cada punto del sistema, es

$$E_C = \sum_{j=1}^{n} E_{C_j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} m_j v_j^2 = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} m_j \omega^2 r_j^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{j=1}^{n} m_j r_j^2 = \frac{1}{2} I_{eje} \omega^2$$

siendo el momento de inercia respecto al eje la suma (extendida a todo el sistema) de cada masa por el cuadrado de su distancia dicho eje.

De manera análoga se definen los momentos de inercia del sistema respecto a puntos y planos, suma de la masa de cada punto por el cuadrado de la distancia que separa cada punto del plano o eje considerado. Para calcular el momento de inercia de un sistema constituido por n masas (m_1, m_2, …m_j,…m_n) respecto a un punto, eje o plano, es necesario establecer un sistema de referencia OXYZ



El momento de inercia del sistema respecto al origen de coordenadas es $I_O = \sum_{j=1}^{n} m_j r_j^2 = \sum_{j=1}^{n} m_j (x_j^2 + y_j^2 + z_j^2)$, siendo r_j la distancia que separa la masa m_j y el punto O respecto al que se calcula el momento de inercia $r_j = \sqrt{x_j^2 + y_j^2 + z_j^2}$.

El momento de inercia del sistema respecto al plano XOY es $I_{XOY} = \sum_{j=1}^{n} m_j z_j^2$, siendo z_j la distancia que separa la partícula de masa m_j de dicho plano.

De forma análoga se calculan los momentos de inercia respecto a los planos YOZ y XOZ, , $I_{YOZ} = \sum_{j=1}^{n} m_j x_j^2$, $I_{XOZ} = \sum_{j=1}^{n} m_j y_j^2$ siendo x_j e y_j las distancias que separan la masa m_j de dichos planos.

Los momentos de inercia respecto a los ejes OX, OY y OZ son

$$I_{OX} = \sum_{j=1}^{n} m_j (y_j^2 + z_j^2)$$
$$I_{OY} = \sum_{j=1}^{n} m_j (x_j^2 + z_j^2)$$
$$I_{OZ} = \sum_{j=1}^{n} m_j (y_j^2 + x_j^2)$$

De las expresiones matemáticas anteriores se desprenden las siguientes **propiedades:**

1. El momento de inercia respecto a un punto es igual a la suma de los momentos de inercia respecto a tres planos perpendiculares entre sí que se corten en dicho punto.
$$I_O = I_{XOY} + I_{XOZ} + I_{YOZ}$$
2. El momento de inercia respecto a un punto es la suma del momento de inercia respecto a un plano que contenga al punto y el momento de inercia respecto a un eje perpendicular que pase por él.
$$I_O = I_{XOY} + I_{OZ} = I_{XOZ} + I_{OY} = I_{YOZ} + I_{OX}$$
3. El momento de inercia respecto a un punto es igual a la semisuma de los momentos de inercia respecto a tres ejes perpendiculares entre sí que se corten en dicho punto.
$$I_O = \frac{1}{2}\left(I_{OX} + I_{OY} + I_{OZ}\right)$$
4. El momento de inercia respecto a un eje cualquiera es la suma de los momentos de inercia respecto a dos planos perpendiculares entre sí que se corten en dicho eje.
$$I_{OX} = I_{XOY} + I_{XOZ}$$
$$I_{OY} = I_{XOY} + I_{YOZ}$$
$$I_{OZ} = I_{YOZ} + I_{XOZ}$$

En el caso de que la figura sea plana (suponemos que está contenida en el plano XOY), el momento de inercia del sistema respecto a dicho plano es nula $I_{XOY} = 0$, de forma que estas propiedades pueden expresarse de la siguiente forma

1. El momento de inercia respecto a un punto es igual a la suma de los momentos de inercia respecto a los dos planos perpendiculares entre sí que se corten en dicho punto.

$$I_O = I_{XOZ} + I_{YOZ}$$

2. El momento de inercia respecto a un punto es igual al momento de inercia respecto al eje perpendicular al plano del sistema que pase por él.

$$I_O = I_{XOY} + I_{OZ} = I_{OZ}$$

3. El momento de inercia respecto a un punto es igual a la suma de los momentos de inercia respecto a los dos ejes perpendiculares entre sí, contenidos en la figura, que se corten en dicho punto. $I_O = I_{OY} + I_{OX}$

4. El momento de inercia respecto a un eje contenido en el plano de la figura coincide con el momento de inercia respecto al plano perpendicular a la figura que contiene a dicho eje.

   El momento de inercia respecto al ejes OX, contenido en el plano, es igual al momento de inercia respecto al plano perpendicular al plano y que contiene al eje $I_{OX} = I_{XOZ}$.

   El momento de inercia respecto al eje OY, contenido en el plano, es igual al momento de inercia respecto al plano perpendicular al plano y que contiene al eje $I_{OY} = I_{YOZ}$.

Teoremas de Steiner

Conociéndose el momento de inercia de un sistema respecto a su centro de gravedad, o respecto a un eje o plano que pasan por él, se puede calcular el momento de inercia respecto a cualquier punto, eje o plano del espacio, mediante los teoremas de inercia para puntos, ejes y planos

- El momento de inercia de un sistema respecto a un punto cualquiera P es igual al momento de inercia de dicho sistema respecto al centro de gravedad mas la masa por el cuadrado de la distancia que separa el punto P y el centro de gravedad G.
- El momento de inercia respecto a un eje cualquiera, es igual al momento de inercia respecto a un eje paralelo al anterior y que pasa por el centro de gravedad, mas la masa del sistema por el cuadra de la distancia que separa ambos ejes.
- El momento de inercia respecto a un plano cualquiera es igual al momento de inercia respecto a un plano paralelo al anterior y que pasa por el centro de gravedad mas la masa del sistema por el cuadrado de la distancia que separa ambos planos.