UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID
E.T.S. de Ingenieros Agrónomos

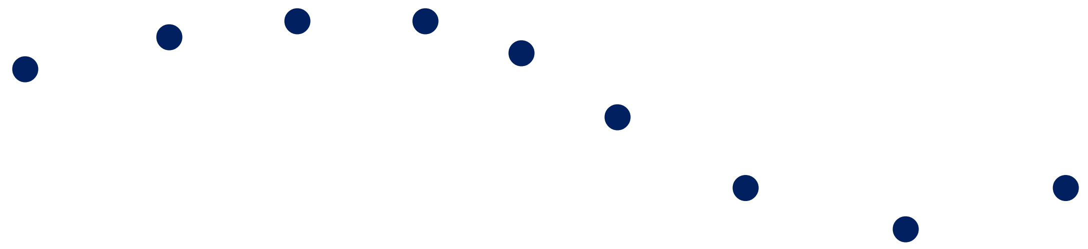
POLITÉCNICA

Cinemática del punto

- Posición de un punto respecto a un sistema de referencia
- Velocidad. Vector velocidad
- Aceleración. Vector aceleración. Componentes intrínsecas
- Movimientos en una dimensión
- Movimientos en dos dimensiones
- Movimiento de trayectoria circular

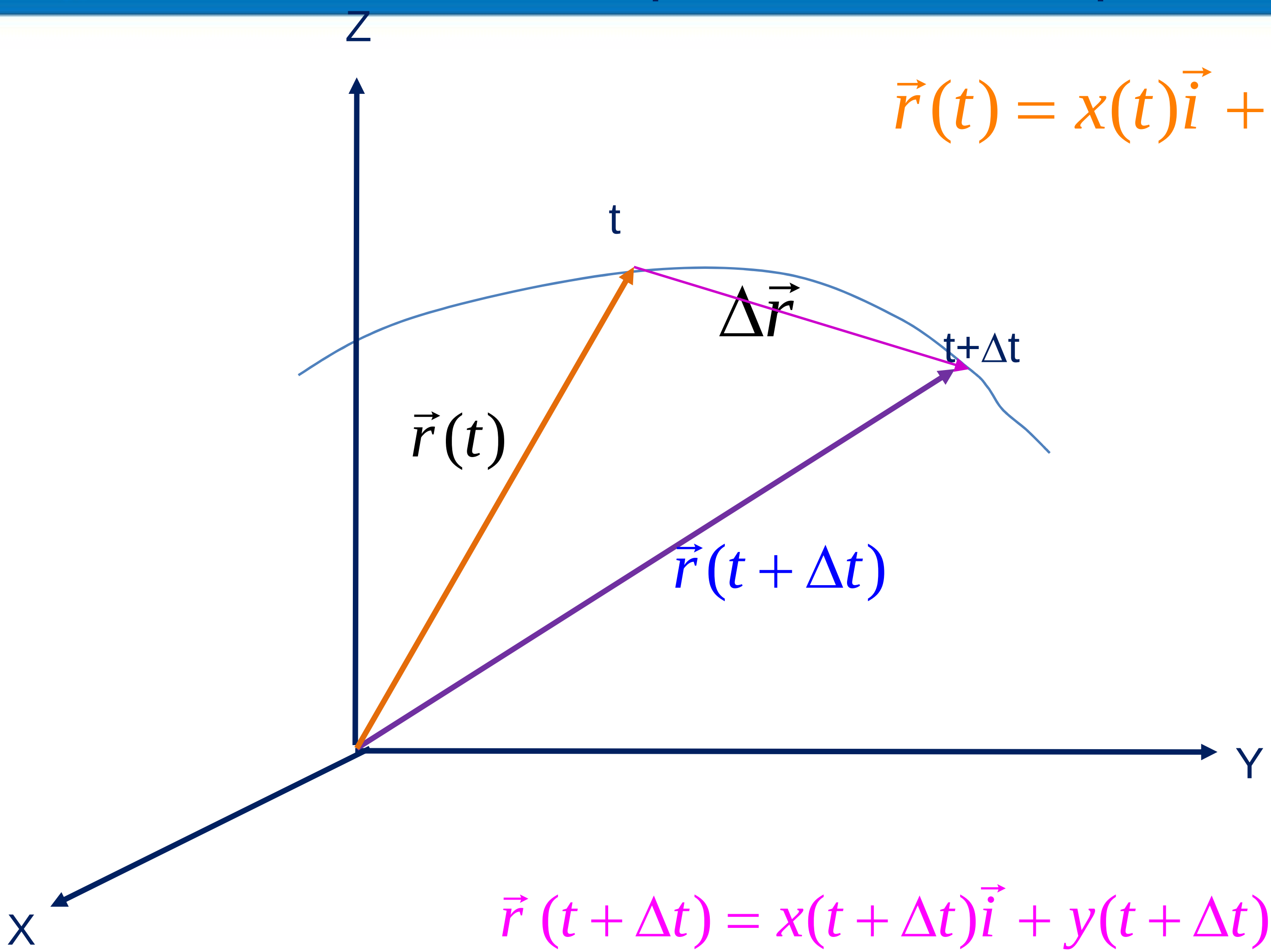
Movimiento de un punto

Sucesión de posiciones ocupadas por un punto



Movimiento de un punto. Vector de posición

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$



$$\vec{r}\,(t+\Delta t) = x(t+\Delta t)\vec{i} + y(t+\Delta t)\vec{j} + z(t+\Delta t)\vec{k}$$

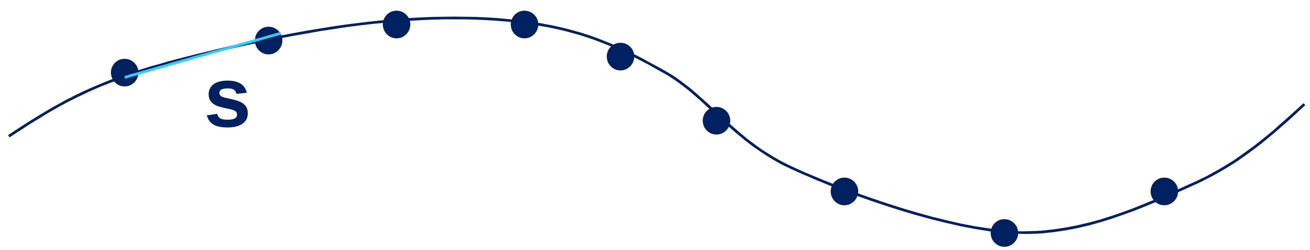
Posición de un punto. Trayectoria, desplazamiento, arco

- Vector de posición $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

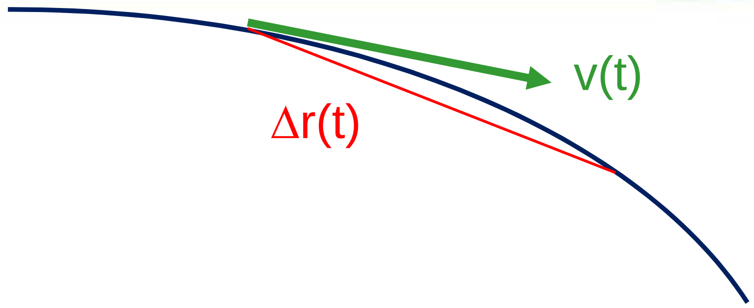
- Vector desplazamiento

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}\,(t+\Delta t) - \vec{r}(t) = \left[x(t+\Delta t)\vec{i} + y(t+\Delta t)\vec{j} + z(t+\Delta t)\vec{k}\right] - \left[x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}\right]$$

- Trayectoria



Ecuación cartesiana de la velocidad



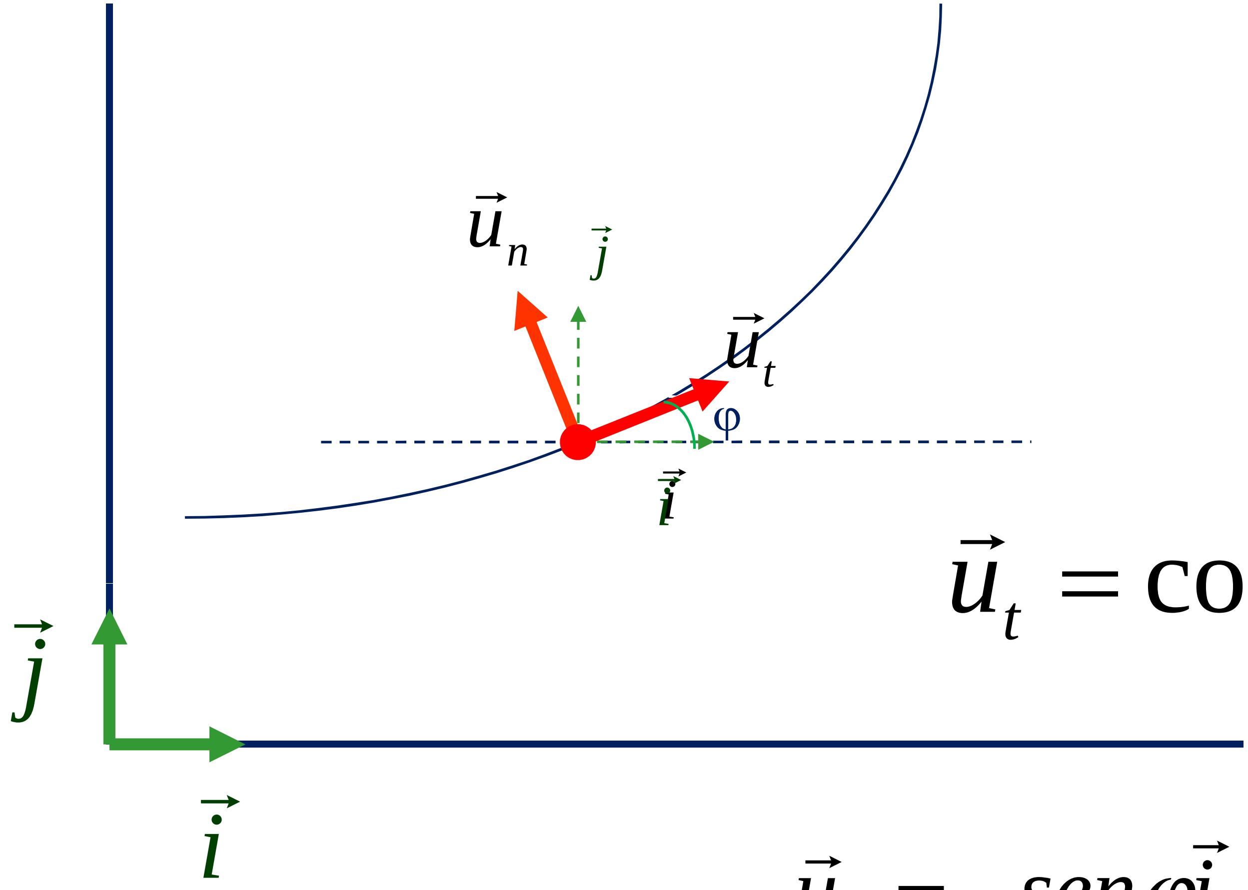
Velocidad instantánea ($\Delta t \to 0$)

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$$

Módulo de la velocidad

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \sqrt{\frac{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}{(dt)^2}} = \frac{ds}{dt}$$

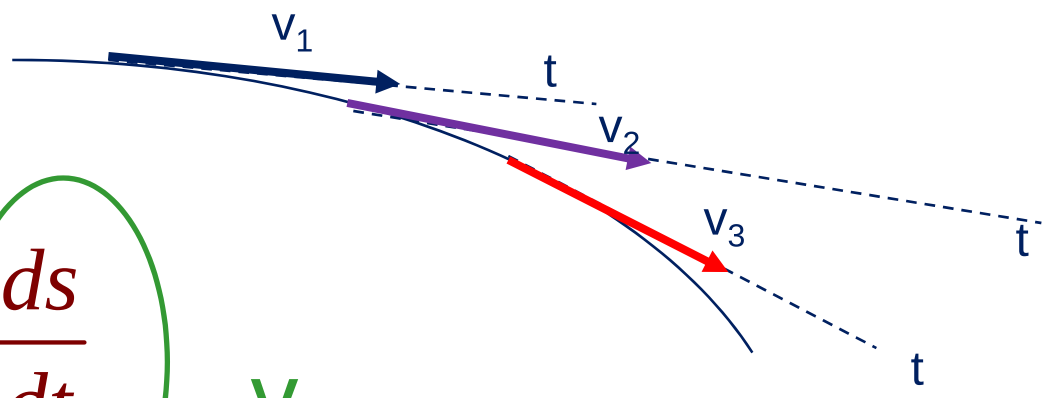
Ecuación intrínseca de la velocidad



$$\vec{u}_t = \cos\varphi\vec{i} + sen\varphi\vec{j}$$

$$\vec{u}_n = -sen\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j} = \frac{d\vec{u}_t}{d\varphi}$$

Ecuación intrínseca de la velocidad



$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

v

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{u}_T$$

$$\boxed{\vec{v} = v \cdot \vec{u}_T}$$

Ecuación cartesiana de la aceleración

Aceleración instantánea ($\Delta t \rightarrow 0$)

$$\vec{a}(t)=\frac{d\vec{v}(t)}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i}+\frac{d^2y}{dt^2}\vec{j}+\frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}=x''\vec{i}+y''\vec{j}+z''\vec{k}$$

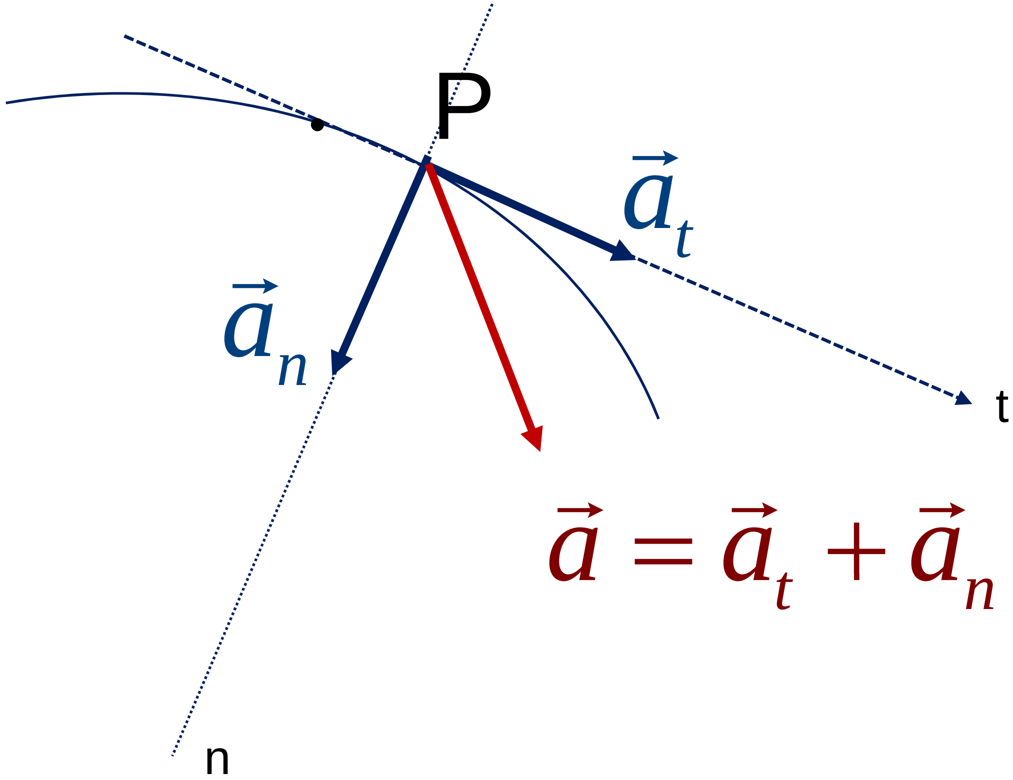
Módulo de la aceleración

$$a=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}=\sqrt{(x'')^2+(y'')^2+(z'')^2}$$

Aceleración media en el intervalo Δt

$$\vec{a}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Componentes intrínsecas de la aceleración



$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

$$\vec{a}_t = a_t \vec{u}_t = \frac{dv}{dt} \vec{u}_t$$

$$\vec{a}_n = a_n \vec{u}_n = \frac{v^2}{\rho} \vec{u}_n$$

Tipos de movimiento

Atendiendo a la componente normal

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

Movimiento curvilíneo: la aceleración normal no es nula

Movimiento rectilíneo: la aceleración normal es nula (radio de curvatura$\rightarrow\infty$)

Tipos de movimiento

Atendiendo a la componente tangencial

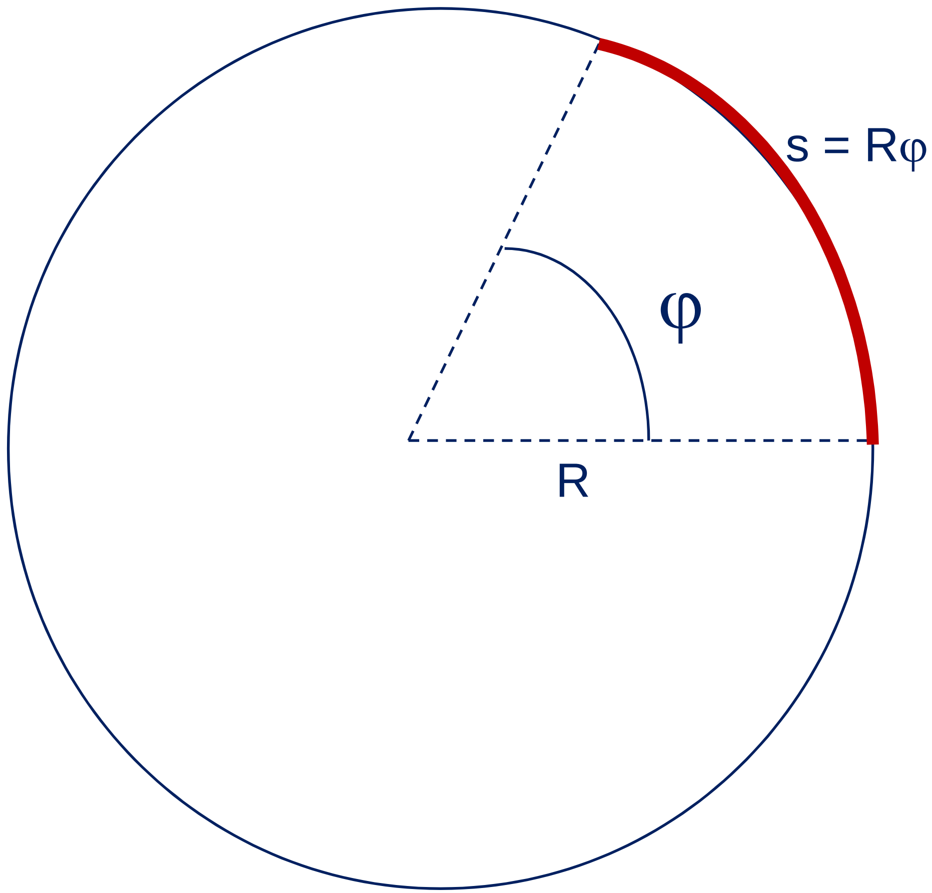
$$a_T = \frac{dv}{dt}$$

Movimiento uniforme: la aceleración tangencial es nula

Movimiento variado: la aceleración tangencial es función del tiempo

Movimiento uniformemente variado: la aceleración tangencial permanece constante

Movimiento circular

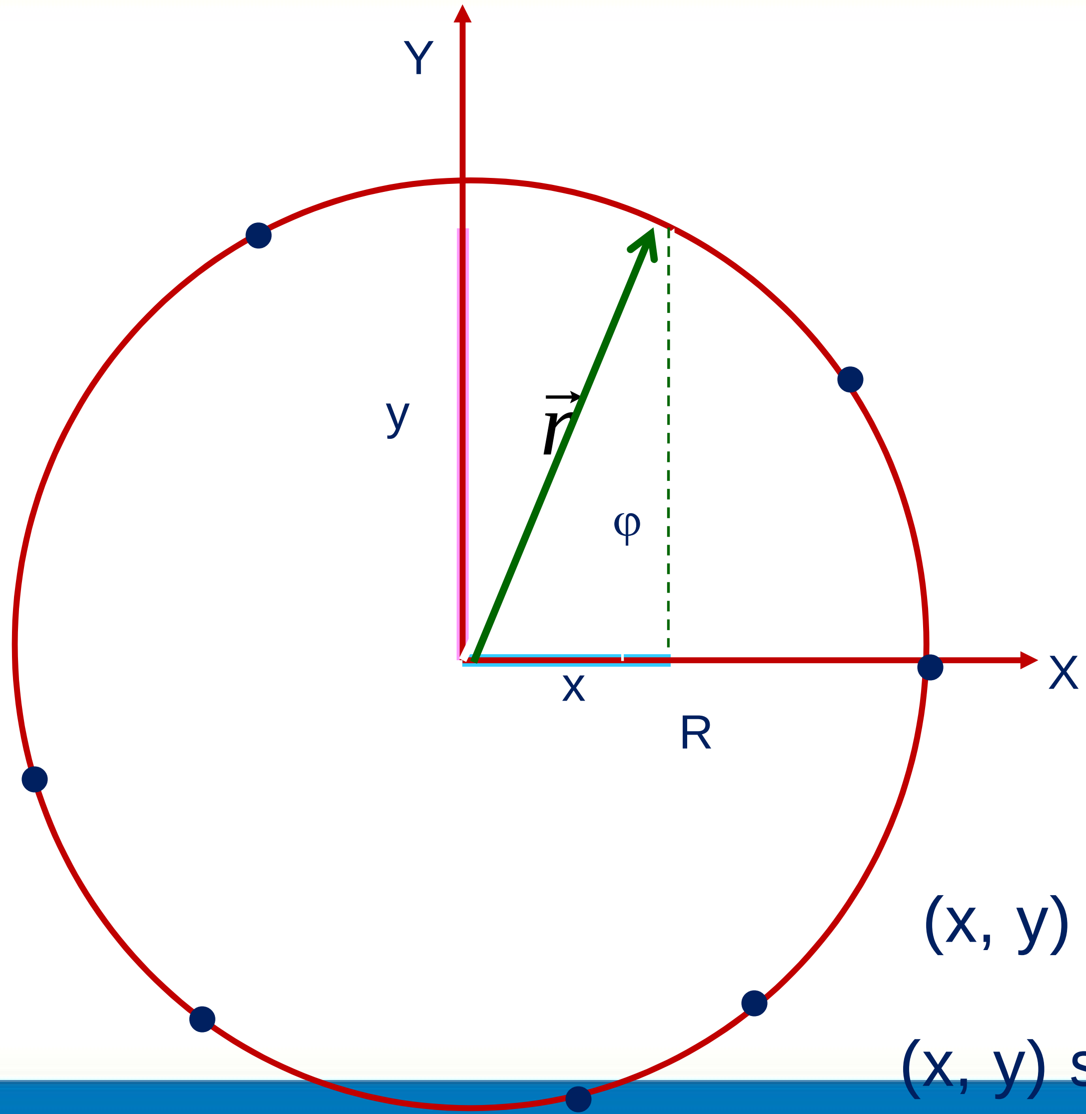


φ (t)

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \varphi' = \omega$$

$$\frac{d\varphi'(t)}{dt} = \varphi'' = \alpha$$

Movimiento circular



x = Rcosφ

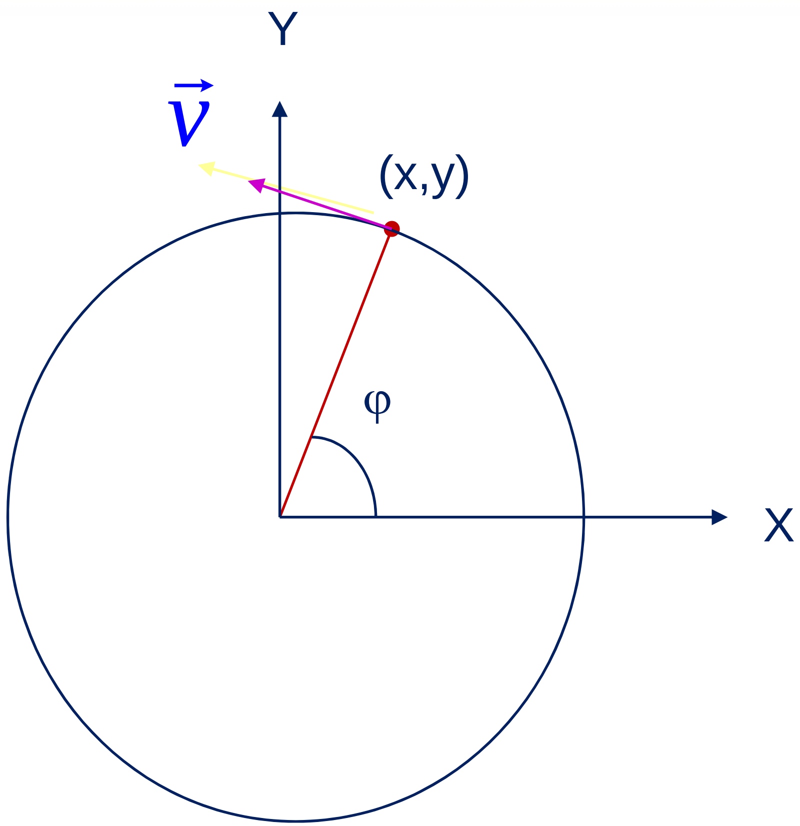
y = Rsenφ

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

(x, y) son función del tiempo

(x, y) son función del ángulo

Movimiento circular. Velocidad



$$\frac{dx}{dt} = \frac{d(R\cos\omega t)}{dt} = -R\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t$$

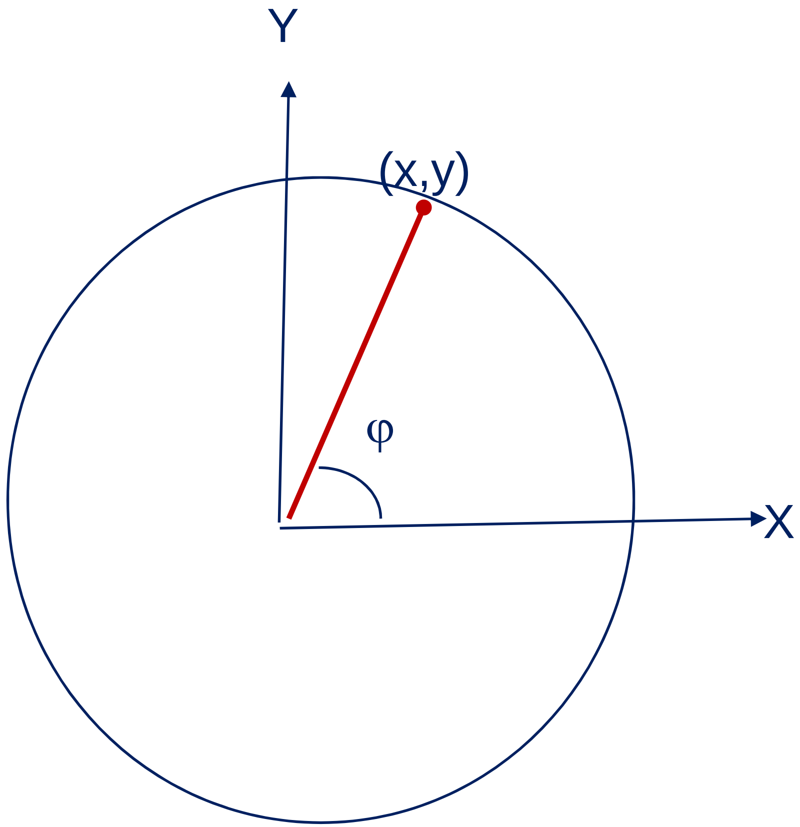
$$\frac{dy}{dt} = \frac{d(R\,\mathrm{sen}\,\omega t)}{dt} = R\omega\cos\omega t$$

$$\vec{u}_t = -\mathrm{sen}\,\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left[-\mathrm{sen}\,\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}\right] R\cdot\omega$$

$$v = R\cdot\omega$$

Movimiento circular. Aceleración



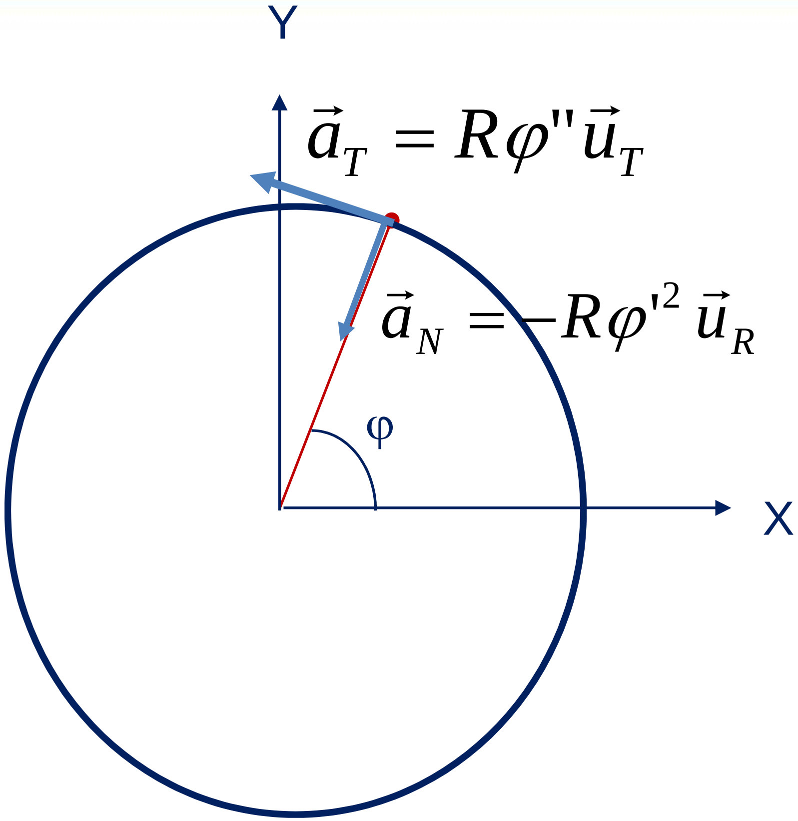
$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d(-\omega R \,\mathrm{sen}\, \omega t)}{dt} =$$

$$= -R\omega^2 \cos \omega t - R\alpha \,\mathrm{sen}\, \omega t$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d(R\omega \cos \omega t)}{dt} =$$

$$= -R\omega^2 \,\mathrm{sen}\, \omega t + R\alpha s \cos \omega t$$

Movimiento circular. Aceleración



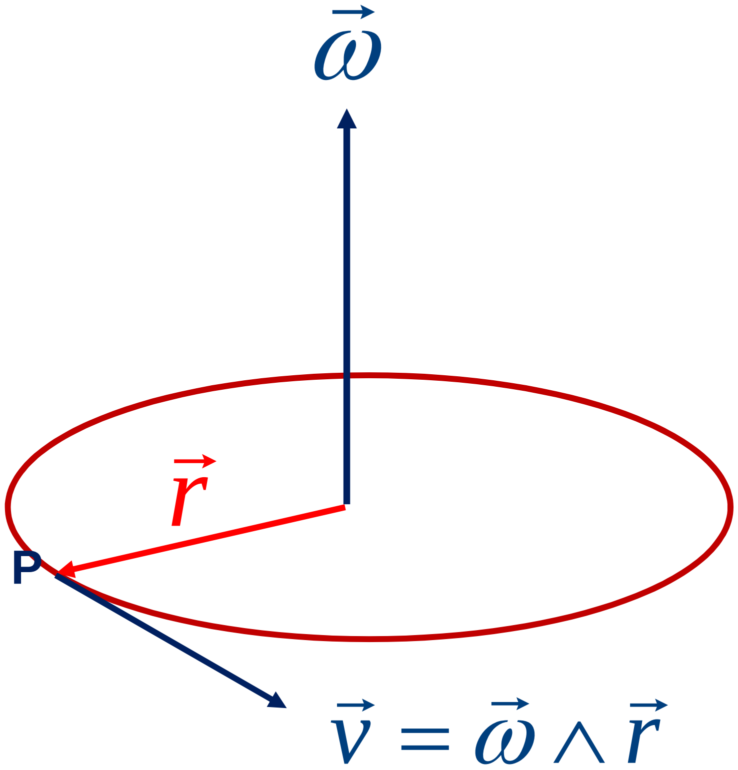
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -R\varphi'^2\left[\cos\varphi\vec{i} + \operatorname{sen}\varphi\vec{j}\right] + R\varphi''\left[-\operatorname{sen}\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j}\right]$$

$$\vec{v} = \vec{M}_P(\vec{\omega}) = \overrightarrow{PO} \wedge \vec{\omega} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -x & -y & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{vmatrix} = \vec{i}(-\omega y) + \vec{j}(\omega x) =$$

$$= \varphi'(-R \operatorname{sen} \varphi \vec{i} + R \cos \varphi \vec{j}) = R\varphi'(-\operatorname{sen} \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j})$$

$$\vec{v} = R\varphi' \ \vec{u}_t$$

Carácter vectorial de la velocidad angular



En un movimiento circular la velocidad de un punto es el momento, respecto a dicho punto, de la velocidad angular

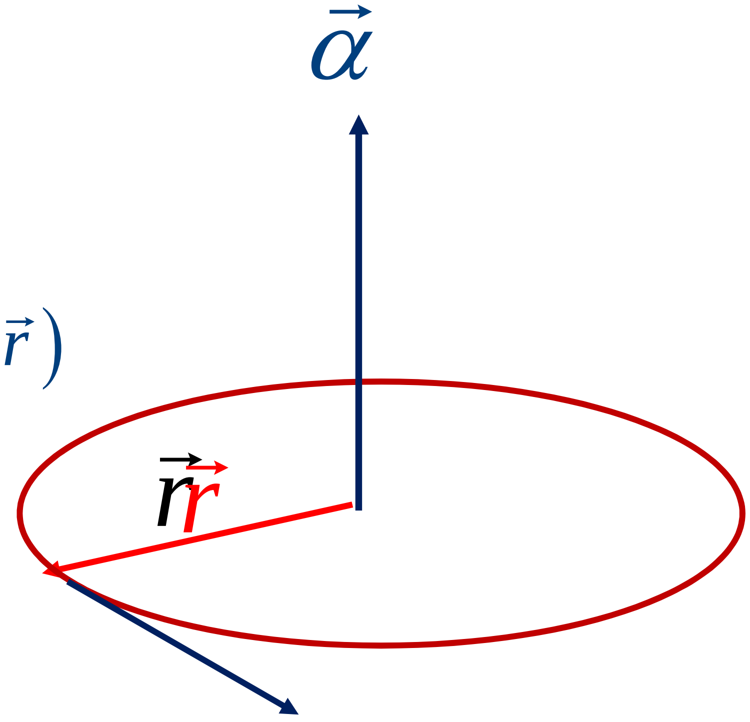
$$\vec{v} = \vec{M}_P(\vec{\omega}) = \overrightarrow{PO} \wedge \vec{\omega} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

Carácter vectorial de la aceleración angular

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\alpha} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{r}\right)$$

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \wedge \vec{r} - \omega^2 \vec{r}$$



$$\vec{a}_T = \vec{\alpha} \wedge \vec{r}$$

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \wedge \vec{r} - \omega^2 \vec{r}$$

Si la velocidad angular varía con el tiempo, $\omega \neq Cte$, el punto tiene aceleración tangencial y aceleración normal

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \vec{\alpha} \wedge \vec{r} - \omega^2 \vec{r}$$

Si la velocidad angular es constante, el punto sólo tiene aceleración normal

$$\vec{a} = \vec{a}_t = -\omega^2 \vec{r}$$