UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

E.T.S. de Ingenieros Agrónomos

POLITÉCNICA

Cinemática del sólido

Sólido sometido a traslación

Sólido sometido a rotación

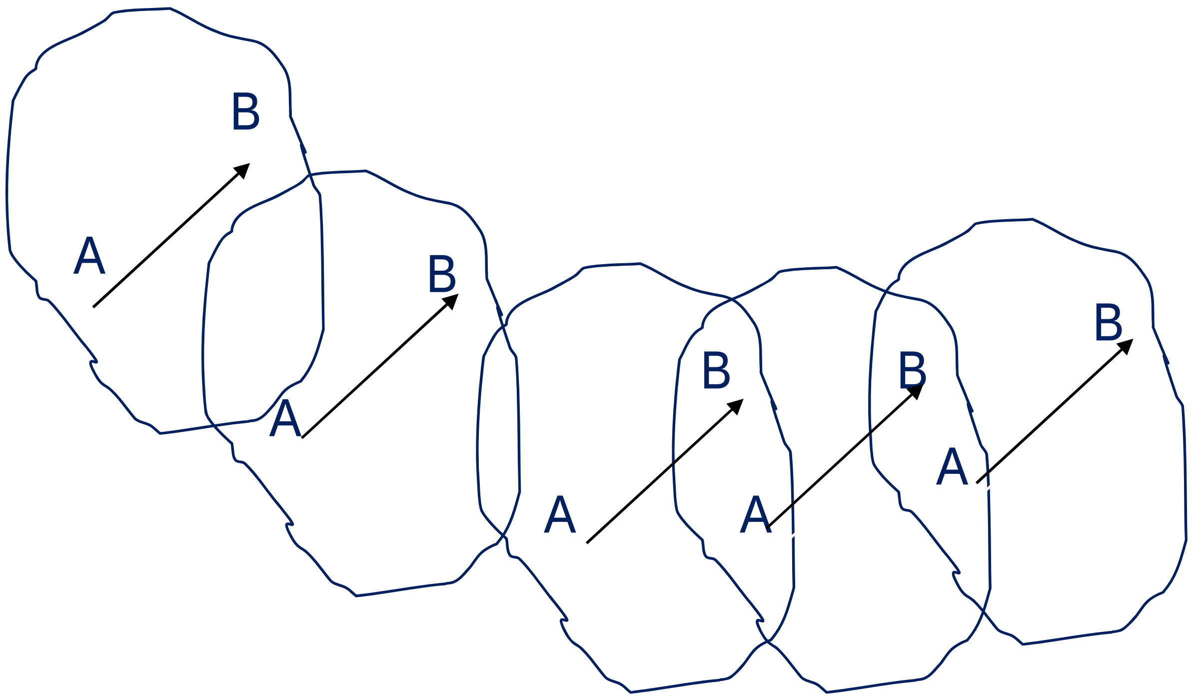
Movimiento helicoidal tangente

Sólido sometido a rotaciones y traslaciones

Movimiento referido a sistemas fijo y móviles.

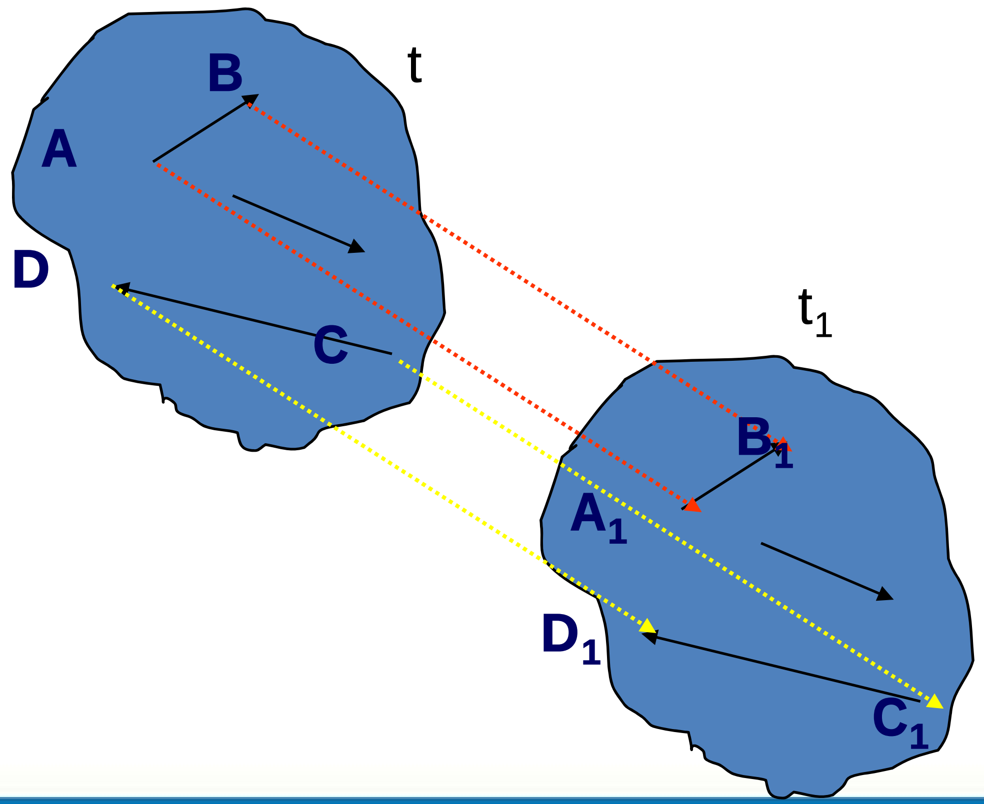
Sólido sometido a traslación

Durante la traslación el vector que une dos puntos del sólido permanece paralelo a sí mismo

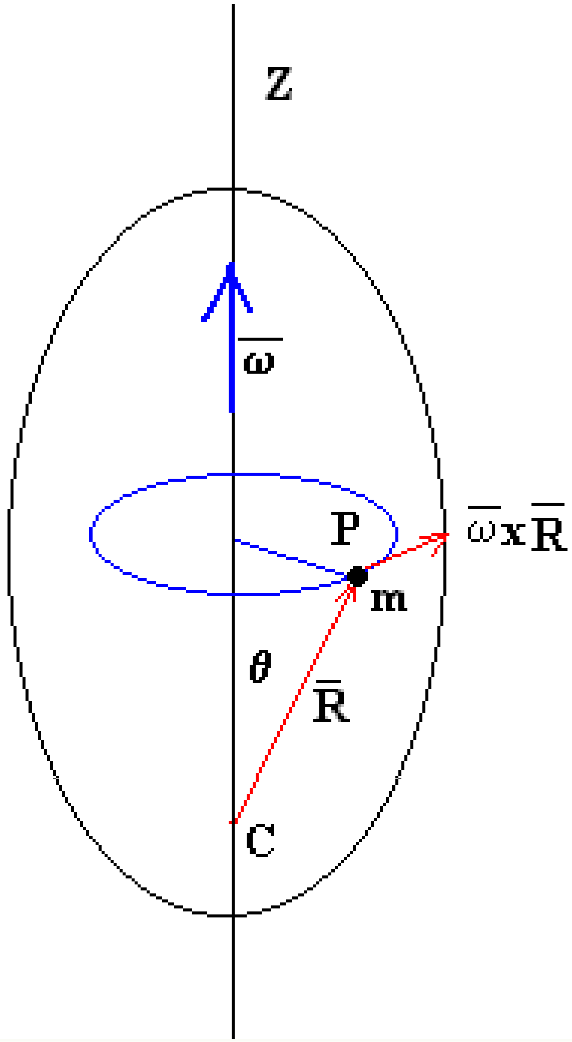


Sólido sometido a traslación

Todos los puntos tienen la misma velocidad de traslación, ya que en el intervalo t_1-t, los desplazamientos AB y A_1B_1 son iguales, al igual que los desplazamientos CD y C_1D_1

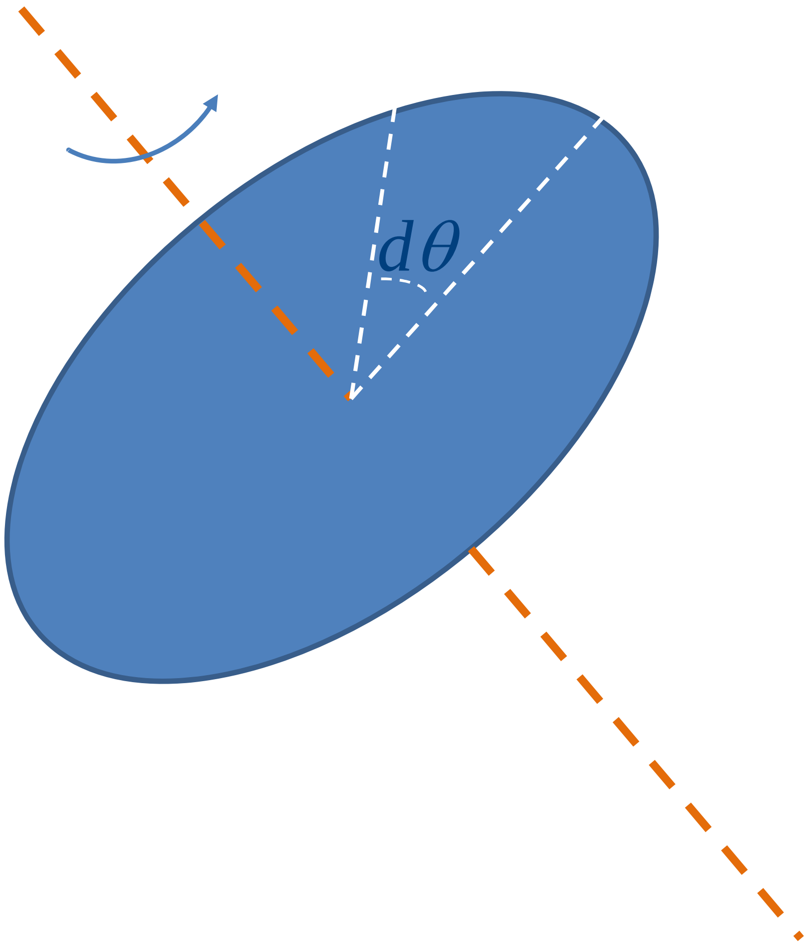


Sólido sometido a rotación



Todos los puntos del sólido giran con la misma velocidad angular $\vec{\omega}$

La velocidad de un punto es el momento respecto a dicho punto del vector deslizante



$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

Velocidad angular

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

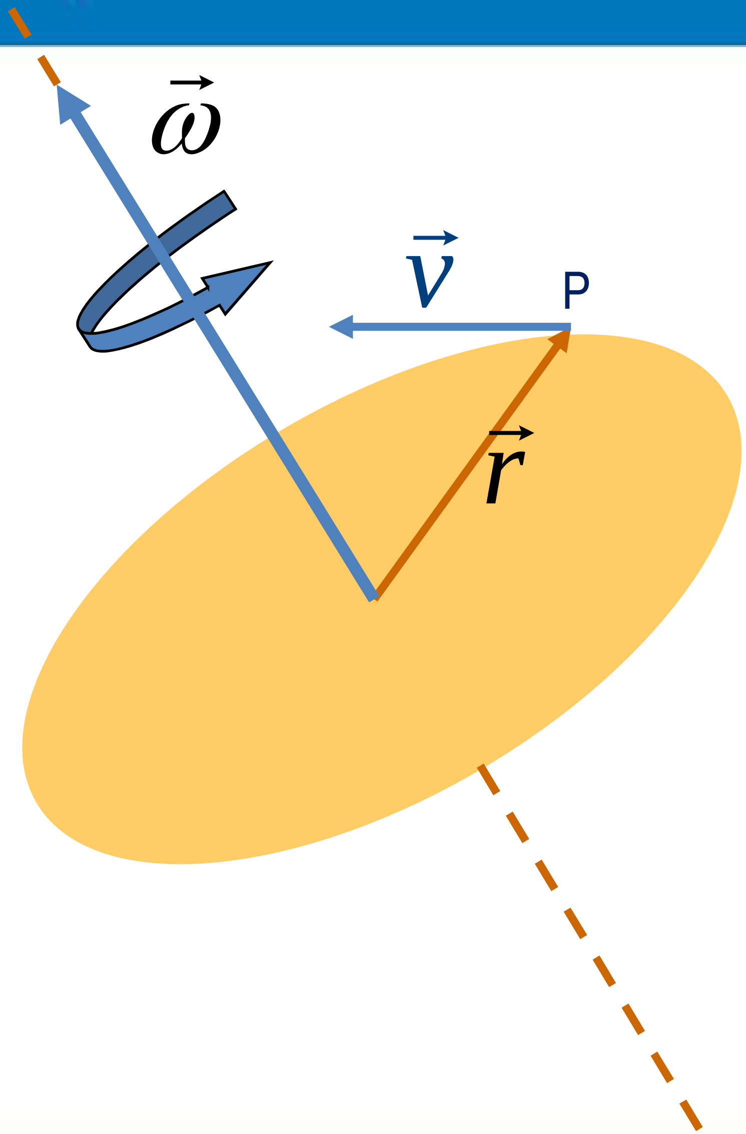
Aceleración angular

La velocidad angular ω es un vector deslizante; el momento respecto a un punto del vector deslizante ω es la velocidad lineal de dicho punto

$$\vec{v} = \vec{M}_P(\vec{\omega}) = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

$\vec{r}$ Es el vector que une el centro de la circunferencia que describe y el punto

A la velocidad angular ω se le pueden aplicar todas las propiedades de los vectores deslizantes



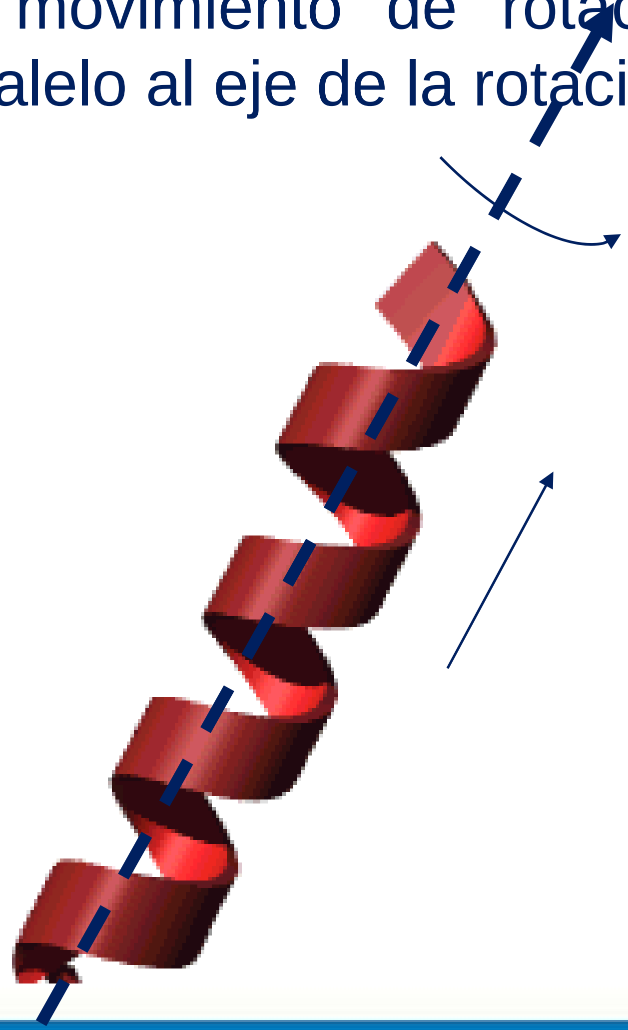
$$\vec{v} = \vec{M}_P(\vec{\omega}) = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

La posición del vector deslizante es indistinta a lo largo de la recta soporte

La velocidad es un vector perpendicular al vector de posición y al vector deslizante

Movimiento helicoidal tangente

Es la composición de un movimiento de rotación y un movimiento de traslación paralelo al eje de la rotación



Sólido sometido a varias rotaciones

La velocidad es la debida a cada una de las rotaciones; como la velocidad de un punto es el momento respecto a dicho punto del vector deslizante ω, la velocidad debida a todas las rotaciones (ω_1, ω_2, ...ω_n) es la suma de los momentos respecto a dicho punto de cada una de las rotaciones

$$\vec{v}_P = \vec{M}_P(\omega_1) + \vec{M}_P(\omega_2) + \ldots.. + \vec{M}_P(\omega_n) = \sum_{j=1}^{n} \vec{M}_P(\omega_j)$$

Sólido sometido a varias rotaciones

Si el sólido está sometido a 2 rotaciones, y éstas forman un par, la velocidad es el momento del par; por tanto equivale a una traslación en el plano perpendicular al plano que determinan los vectores del par

Si un sólido está sometido a un movimiento de traslación, el movimiento equivale a un par de rotaciones en el plano perpendicular al vector traslación

Sólido sometido a varias traslaciones

Si el sólido está sometido a varias traslaciones, la velocidad es la suma de todas las velocidades de traslación

$$\vec{v}_P = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \ldots . \vec{T}_m = \sum_{i=1}^{m} \vec{v}_P(\vec{T}_i)$$

Sólido sometido a varias traslaciones y rotaciones

Velocidad de un punto P

La velocidad de un punto debida a varias traslaciones es la suma de las velocidades de cada un de ellas

$$\vec{v}_P(traslacion) = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \ldots.\vec{T}_m$$

La velocidad de un punto debida a varias rotaciones es la suma de las velocidades debidas a cada una de ellas

$$\vec{v}_P(rotaciones) = \vec{v}_P(\vec{\omega}_1) + \vec{v}_P(\vec{\omega}_2) + \ldots + \vec{v}_P(\vec{\omega}_n)$$

$$\vec{v}_P = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \ldots.\vec{T}_m + \vec{v}_P(\vec{\omega}_1) + \vec{v}_P(\vec{\omega}_2) + \ldots\vec{v}_P(\vec{\omega}_n)$$

Invariantes cinemáticos

1º Invariante

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + ... + \vec{\omega}_n$$

2º Invariante

$$\vec{\omega} \cdot \vec{v}_O = \vec{\omega} \cdot \vec{v}_P = \vec{\omega} \cdot \vec{v}_Q = ...$$

3º Invariante

$$\frac{\vec{\omega} \cdot \vec{v}_O}{|\vec{\omega}|} = \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{v}_P}{|\vec{\omega}|} = \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{v}_Q}{|\vec{\omega}|} = ... v_{\min}$$

Velocidad de mínimo módulo o
velocidad de mínimo deslizamiento

Eje Instantáneo de Rotación y Deslizamiento

El lugar geométrico de los puntos del espacio cuya velocidad es de Mínimo deslizamiento se denomina Eje Instantáneo de Rotación y Deslizamiento (E.I.R.D).

La velocidad de mínimo deslizamiento es paralela a la rotación resultante, por tanto

$$\vec{v}_{\min} = v_{\min} \cdot \vec{u}_{\omega} = v_{\min} \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} = \left(\frac{\vec{\omega} \cdot \vec{v}_O}{|\vec{\omega}|} \right) \cdot \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}$$

Reducción del movimiento de un sólido

$$\vec{\omega} \neq \vec{0}$$

$$\vec{v}_O = \vec{0}$$

El sistema lleva movimiento de rotación

$$\vec{\omega} = \vec{0}$$

$$\vec{v}_O \neq \vec{0}$$

El sistema lleva movimiento de traslación con la velocidad v_O

$$\vec{\omega} = \vec{0}$$

$$\vec{v}_O = \vec{0}$$

El sistema está en reposo

Movimiento relativo

El movimiento que tiene un punto se puede referir a un sistema en reposo: el movimiento se denomina absoluto

El movimiento que tiene un punto se puede referir a un sistema en movimiento: El movimiento se denomina relativo.

Si el punto está en reposo, pero está dentro de un sistema en movimiento: el movimiento se denomina de arrastre

Movimiento relativo

Dos personas observan el movimiento de un punto: uno en un sistema de referencia fijo (O_1, $X_1Y_1Z_1$) y otro en un sistema en movimiento

Debido al movimiento del punto sus coordenadas (x,y,z) se modifican a lo largo del tiempo

El sistema en movimiento se traslada con velocidad v_o y aceleración a_o; a su vez el sistema rota en torno a un eje con velocidad angular w y aceleración angular α

¿Qué observa cada uno?

Movimiento relativo

Movimiento relativo: Si el sistema estuviera quieto, ni rota ni se traslada, pero el punto se mueve, el observador en movimiento observa la velocidad y aceleración que tiene el punto debido a que sus coordenadas van cambiando en función del tiempo

$$\vec{v}_r = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$\vec{a}_r = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d\ \ y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

Movimiento de arrastre

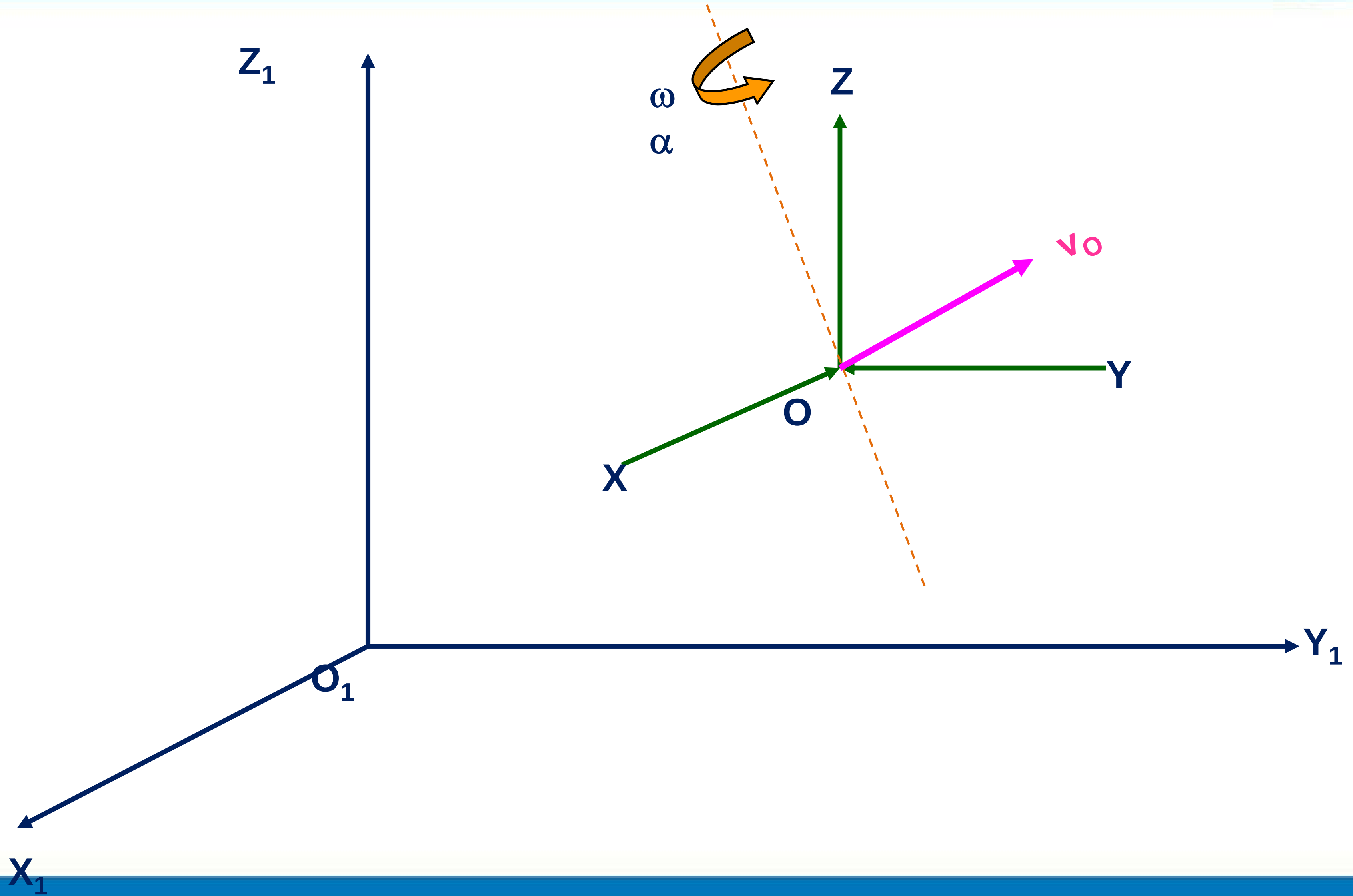
Movimiento de arrastre: Si el punto estuviera quieto, pero el sistema rota y se traslada, el observador en reposo observa que el punto se mueve con el movimiento de traslación de la plataforma (v_0 y a_0) y por otra parte describe una trayectoria circular con velocidad angular w (trayectoria circular): Tiene la velocidad y aceleración debidas a un movimiento rectilíneo y a un movimiento circular

$$\vec{v}_{arr} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

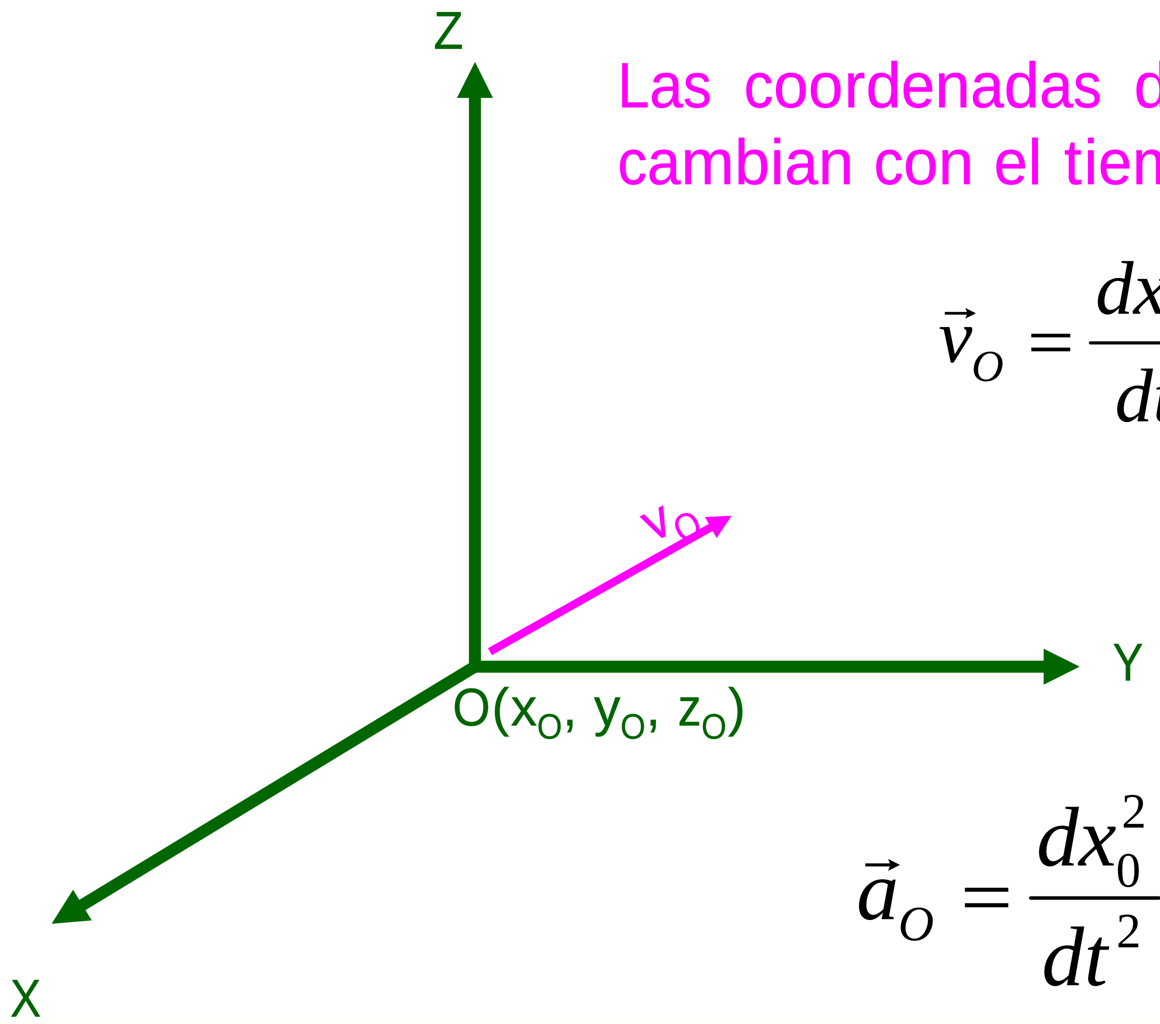
$$\vec{a}_{arr} = \vec{a}_0 + \vec{\alpha} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})$$

Ecuaciones matemáticas del movimiento relativo

Sistemas de referencia fijos y móviles



El sistema móvil solo se traslada



Las coordenadas del punto $O(x_O, y_O, z_O)$ cambian con el tiempo

$$\vec{v}_O = \frac{dx_o}{dt}\vec{i} + \frac{dy_o}{dt}\vec{j} + \frac{dz_o}{dt}\vec{k}$$

$$\vec{a}_O = \frac{dx_0^2}{dt^2}\vec{i} + \frac{dy_0^2}{dt^2}\vec{j} + \frac{dz_0^2}{dt^2}\vec{k}$$

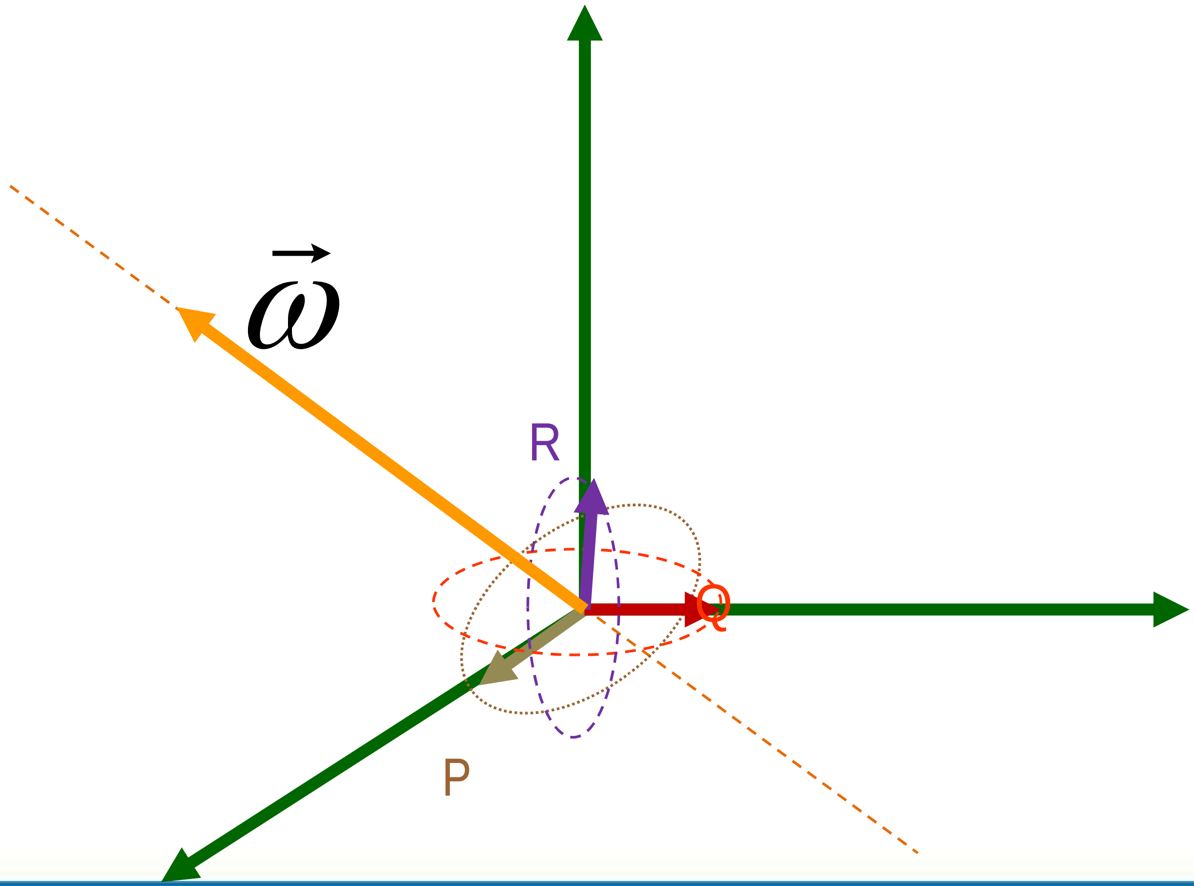
El sistema móvil solo se traslada

La velocidad que tiene un punto por ir dentro de un sistema que se mueve, se denomina velocidad de arrastre, porque el sistema móvil arrastra al punto en su movimiento

v_O y a_0 son la velocidad y aceleración arrastre del punto debidas a que el punto va dentro de un sistema que se mueve con traslación, y en consecuencia le arrastra

Sistema de referencia sólo rota con velocidad angular ω

Los puntos P, Q y R que están situados sobre los ejes, describen trayectorias circulares.



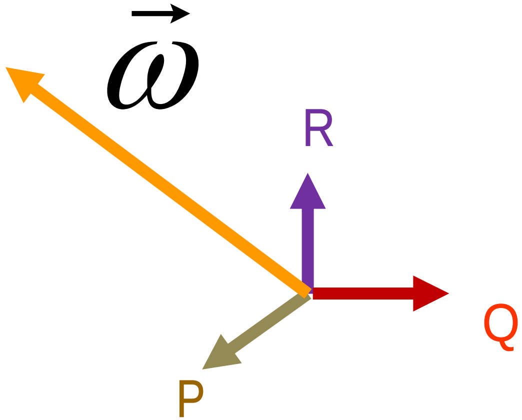
$$\vec{i} = \overrightarrow{OP}$$

$$\vec{j} = \overrightarrow{OQ}$$

$$\vec{k} = \overrightarrow{OR}$$

Sistema de referencia sólo rota

La velocidad de un punto es el momento respecto a ese punto del vector deslizante



$$\vec{v}_P = \vec{M}_P(\omega) = \overrightarrow{PO} \wedge \vec{\omega} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP} = \vec{\omega} \wedge \vec{i}$$

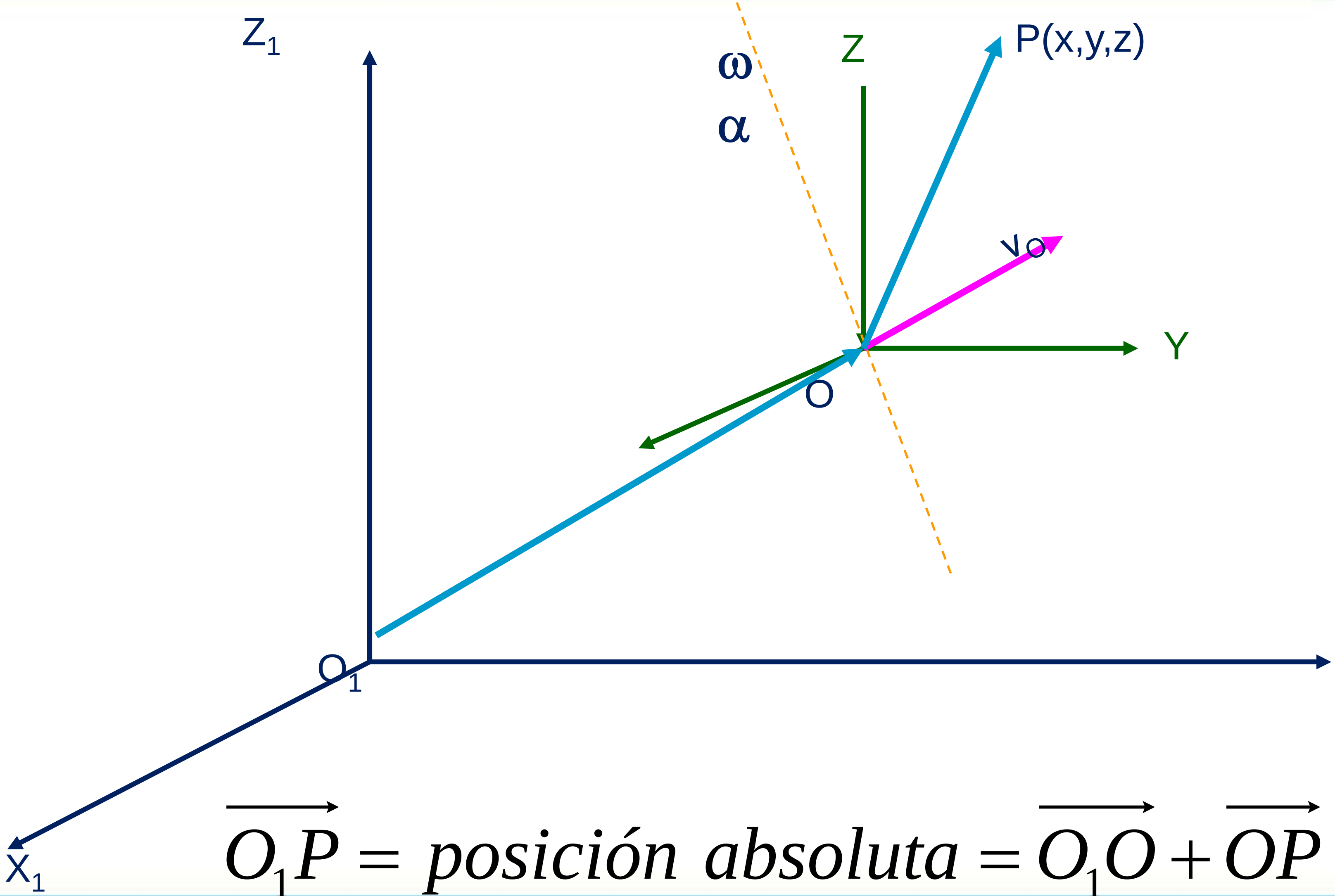
$$\vec{v}_Q = \vec{M}_Q(\omega) = \overrightarrow{QO} \wedge \vec{\omega} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OQ} = \vec{\omega} \wedge \vec{j}$$

$$\vec{v}_R = \vec{M}_R(\omega) = \overrightarrow{RO} \wedge \vec{\omega} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OR} = \vec{\omega} \wedge \vec{k}$$

Si el sistema móvil sólo rota, la velocidad y aceleración de arrastre de un punto son las debidas a que el punto va dentro de un sistema que se mueve con rotación traslación, y en consecuencia le arrastra

(si el sistema de referencia es una plataforma que gira, cualquier punto dentro de la plataforma es arrastrada con esa velocidad y esa aceleración, que corresponden a un movimiento circular)

Movimiento del punto respecto al sistema fijo



$$\overrightarrow{O_1P} = posición\ absoluta = \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OP}$$

Movimiento del punto respecto al sistema fijo

$$\vec{v}_{abs} = \vec{v}_r + \vec{v}_{arr} = \left(\frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \right) + \left(\vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge \vec{r} \right)$$

$$\vec{a}_{abs} = \vec{a}_r + \vec{a}_0 + \vec{\alpha} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{r} \right) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r$$

Casos particulares

Casos particulares. 1. El sistema rota con rotación uniforme

$$\vec{v}_{abs} = \vec{v}_r + \vec{v}_{arr} = \vec{v}_r + \left(\vec{\omega} \wedge \vec{r}\right)$$

$$\vec{a}_{abs} = \vec{a}_r + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{r}\right) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r$$

Casos particulares. 2. El sistema rota con aceleración angular

$$\vec{v}_{abs} = \vec{v}_r + \vec{v}_{arr} = \vec{v}_r + \left(\vec{\omega} \wedge \vec{r}\right)$$

$$\vec{a}_{abs} = \vec{a}_r + \vec{\alpha} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{r}\right) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r$$

Casos particulares. 3. El sistema se mueve con traslación uniforme

$$\vec{v}_{abs} = \vec{v}_r + \vec{v}_{arr} = \vec{v}_r + \vec{v}_O$$

$$\vec{a}_{abs} = \vec{a}_r$$

Casos particulares. 4. El sistema se mueve con traslación no uniforme

$$\vec{v}_{abs} = \vec{v}_r + \vec{v}_{arr} = \vec{v}_r + \vec{v}_O$$

$$\vec{a}_{abs} = \vec{a}_r + \vec{a}_0$$