CINEMÁTICA

La Cinemática es la parte de la Mecánica que estudia el movimiento de los cuerpos, prescindiendo de las causas que lo producen. El objetivo de la cinemática es averiguar en cualquier instante la posición que ocupa el cuerpo, su velocidad y su aceleración.

Cinemática del punto

Si el cuerpo es un punto material que se mueve sobre una curva, y en un instante t se encuentra en un punto M , se define:

Vector posición, al vector que define la posición del móvil puntual $\vec{OM} = \vec{r}\left(t\right) = x\left(t\right)\vec{i} + y\left(t\right)\vec{j} + z\left(t\right)\vec{k}$, siendo O el origen de coordenadas del sistema de referencia elegido. Es un vector variable en el tiempo y la curva que describe su extremo M se llama trayectoria.

Vector velocidad, al vector que se obtiene al derivar el vector posición $\vec{r}\left(t\right)$ respecto al tiempo, por tanto sus componentes son las derivadas respecto al tiempo de las componentes del vector de posición. Este vector está localizado en M y coincide con la tangente a la curva.

$$\vec{v}\left(t\right) = \frac{d\vec{r}\left(t\right)}{dt} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$$

Su módulo $v = \frac{ds}{dt}$, es la derivada del arco recorrido s respecto al tiempo, su dirección es la de la tangente a la curva en el instante que se considere, por tanto puede expresarse como el producto de su módulo por un vector unitario en la dirección de la tangente

$$\vec{v} = v \cdot \vec{u}_T$$

Vector aceleración, es la derivada del vector velocidad respecto al tiempo.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = x''\vec{i} + y''\vec{j} + z''\vec{k}$$

siendo x’’, y”,z” las componentes cartesianas del vector aceleración. El vector aceleración $\vec{a}$ se puede expresar también en función de sus componentes intrínsecas (una componente en la dirección de la tangente y otra en la dirección normal):

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + \frac{v^2}{\rho}\vec{u}_N$$

El término $\frac{dv}{dt}\vec{u}_T = \vec{a}_T$ es la aceleración tangencial, que expresa la variación del módulo de velocidad con el tiempo y su dirección es la tangente a la trayectoria.

El término $\frac{v^2}{\rho}\vec{u}_N = \vec{a}_N$ es la aceleración normal, que mide la variación de la dirección de la velocidad con el tiempo, está dirigida siempre según la perpendicular a la trayectoria y hacia el centro de curvatura de la misma.

Clasificación de los movimientos

1. **Atendiendo a la forma de la componente normal** de la aceleración $a_N = \frac{v^2}{\rho}$, el movimiento se clasifica en:

   1.1. Movimiento curvilíneo, si el radio de curvatura depende del tiempo $\rho = \rho(t)$.

   1.2. Movimiento rectilíneo, si la aceleración normal es nula, $a_N = 0$, que implica que el radio de curvatura es infinito).

Los dos movimientos anteriores pueden tener lugar en el espacio o en el plano.

2. Atendiendo a la forma de la componente tangencial de la aceleración, $a_T = \frac{dv}{dt}$, el movimiento se clasifica en:

2.1. Movimiento uniforme, si la aceleración tangencial es nula $a_T = 0$.

2.2. Movimiento variado, si la aceleración tangencial es función del tiempo $a_T = a_T(t)$.

2.3. Movimiento uniformemente variado, si la aceleración tangencial permanece constante $a_T = cte$.

Movimiento circular

Es un movimiento plano, en el que el radio de curvatura permanece constante e igual al radio de la circunferencia que describe el punto móvil. La ecuación de la trayectoria, en paramétricas, es:

$$\left.\begin{array}{l} x = R\cos\varphi \\ y = R\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ z = 0 \end{array}\right\}$$

siendo R el radio de la circunferencia, y φ el ángulo que forma el vector de posición con el eje OX en cada instante.

El vector de posición es $\vec{r} = R\cos\varphi\vec{i} + Rsen\varphi\,\vec{j} = R\vec{u}_R$.

El vector velocidad es $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left[-sen\varphi\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}\right]R\cdot\varphi'$. Como $|\vec{r}| = R = cte$ la velocidad $\vec{v}$ es perpendicular a $\vec{r}$:$\vec{v}\cdot\vec{r} = 0$.

El módulo de la velocidad $v = R\cdot\varphi'$, siendo $\varphi' = \frac{d\varphi}{dt}$ la velocidad angular.

El vector velocidad es el momento respecto a la posición en ese instante de la velocidad angular :

$$\vec{v} = \vec{M}_M\left(\vec{\varphi}\right)' = \vec{\varphi}'\wedge\vec{R} = R\varphi'\vec{u}_T$$

siendo $\vec{u}_T = -sen\varphi\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}$

El vector aceleración es: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -R\varphi'^2\left[\cos\varphi\,\vec{i} + \mathrm{sen}\,\varphi\,\vec{j}\right] + R\varphi''\left[-\mathrm{sen}\,\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}\right]$$

Las componentes intrínsecas de la aceleración son :

La aceleración tangencial $\vec{a}_T = R\varphi''\vec{u}_T$, es un vector con la misma recta direccional que la velocidad angular puesto que: $\vec{a}_T = \vec{\varphi}''\wedge\vec{R}$, siendo $\varphi'' = \frac{d\varphi'}{dt}$ la aceleración angular.

El módulo de $a_T = R\cdot\varphi''$.

La aceleración normal $\vec{a}_N = -R\varphi'^2\,\vec{u}_R$ está dirigida hacia el centro de la circunferencia y la misma recta soporte que el radio vector $\vec{r}$. El módulo de $a_N = R\varphi'^2 = \frac{v^2}{R} = v\cdot\varphi'$

Cinemática del sólido rígido

Si el cuerpo móvil es un sólido rígido: la distancia entre sus puntos es invariable, puede estar sometido a dos clases de movimientos: traslación o rotación o a ambos.

Traslación. Un cuerpo móvil está sometido a un movimiento de traslación cuando todos sus puntos efectúan trayectorias paralelas a sí mismas, por tanto en cualquier instante que se considere, las velocidades de sus puntos son vectores equipolentes y la traslación quedará definida cuando se conozca el vector $\vec{T}$ equipolente al vector velocidad de cualquier punto del sólido.
De la definición: el campo de distribución de velocidades de traslación de un sólido es equivalente al campo de distribución de momentos de un par cuyo eje o momento sea $\vec{T}$ en ese instante.

Rotación. Un cuerpo móvil está sometido a un movimiento de rotación cuando todos sus puntos efectúan movimientos circulares situados en planos perpendiculares al eje de rotación y con centro un punto de dicho eje. Las velocidades de los diferentes puntos del sólido son diferentes, y dependen de su distancia al eje de rotación. La velocidad angular es la misma para todos los puntos del sólido en un instante determinado y es un vector deslizante situado sobre el eje de rotación.
Por tanto, una rotación quedará definida cuanto se conozcan en cada instante
las coordenadas del punto del sólido y el vector velocidad angular, que al ser deslizante, tiene que conocerse sus componentes y un punto del eje de rotación.
La velocidad del punto del sólido P es el momento respecto a dicho punto de la velocidad angular que es el producto vectorial de $\vec{\omega}$ por el vector distancia desde un punto del eje E hasta el punto del sólido P: $\vec{V}_P = \vec{M}_P(\vec{\omega}) = \vec{\omega} \wedge P\vec{E}$.

Composición de rotaciones y traslaciones
Si un sólido rígido está sometido a n rotaciones $\{\vec{\omega}_1;\vec{\omega}_2..........\vec{\omega}_n\}$y m traslaciones $\{\vec{T}_1,\vec{T}_2......\vec{T}_m\}$, la velocidad de un punto del sólido es la suma de los momentos respecto al punto del sólido de cada una de las rotaciones más la suma de traslaciones.
Como una traslación es equivalente a un par de rotaciones cuyo momento o eje es precisamente la traslación, se puede considerar al sólido sometido a n rotaciones y m pares de rotaciones (cuyos ejes son las traslaciones) y tratarlas como un sistema de vectores deslizantes

La rotación resultante es la suma algebraica de todas las rotaciones, $\vec{\omega} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\omega}_i$.

La velocidad de un punto del sólido se expresa

$$\vec{v}_P = \vec{M}_P(\vec{\omega}_1) + \vec{M}_P(\vec{\omega}_2) + ...+ \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + ...$$ o bien

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{PO} \wedge \vec{\omega}$$

Velocidad de mínimo deslizamiento. Es la velocidad aquellos puntos del sólido, cuyo módulo es mínimo y por tanto paralela a la rotación resultante $\vec{\omega}$, o lo que es lo mismo paralela al eje de rotación. Su módulo es

$$|\vec{v}_{min}| = \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{v}_P}{\omega}$$

El eje instantáneo de rotación es lugar geométrico de los puntos del sólido para los cuales la velocidad es mínima.

El torsor cinemático es el formado por la rotación resultante $\vec{\omega}$ y la velocidad de mínimo deslizamiento $\vec{V}_E$, siendo E un punto del eje de rotación.

El campo de velocidades de un sólido tiene la misma estructura matemática que el campo de momentos de un sistema de vectores deslizantes. Cualquier propiedad relativa a los vectores deslizantes tiene su traducción inmediata a la cinemática, sin mas que cambiar la resultante por la rotación resultante y el momento resultante respecto a un punto por la velocidad de dicho punto.

Movimiento helicoidal

Todos los puntos del sólido, excepto los que pertenezcan al eje de rotación, se trasladan paralelamente al eje de rotación con una velocidad $\vec{v}_E$ y rotan, es decir, describen movimientos circulares alrededor del eje de rotación con una velocidad angular $\vec{\omega}$, luego describen hélices cilíndricas; los puntos que pertenezcan al eje de rotación sólo se deslizan a lo largo del mismo con una velocidad $\vec{v}_E$.

Casos particulares:

a) Si $\vec{\omega} = 0$ el sólido sólo se traslada, movimiento rectilíneo.

b) Si $\vec{V}_E = 0$ el sólido sólo rota.

Cinemática relativa

El movimiento de un cuerpo se describe refiriéndolo a un sistema de ejes coordenados o sistema de referencia que suponemos fijo. Cuando el sistema de referencia se mueve, el estudio del movimiento de un móvil puntual consiste en conocer en cada instante la velocidad y aceleración que lleva respecto a dos sistemas de referencia uno fijo y el otro en movimiento respecto a él. Se define

Velocidad relativa y aceleración relativa: velocidad y aceleración del punto móvil con respecto al sistema de referencia móvil, pero considerándolo fijo.

Velocidad de arrastre y aceleración de arrastre: velocidad y aceleración del punto móvil considerando a éste fijo y sólo sometido al movimiento de arrastre que es el movimiento que lleva el sistema de referencia móvil con respecto al sistema fijo.

Velocidad absoluta y aceleración absoluta: velocidad y aceleración del móvil puntual sometido a los dos tipos de movimiento anteriores, relativo y de arrastre.

Puede ocurrir:

a) Que el movimiento de arrastre sea sólo una traslación, en este caso:

$$\vec{v}_{absoluta} = \vec{v}_{relativa} + \vec{v}_{arrastre}$$

$$\vec{a}_{absoluta} = \vec{a}_{relativa} + \vec{a}_{arrastre}$$

En el caso particular de que la traslación sea uniforme, $\vec{a}_{arrastre} = 0$ y la aceleración absoluta y relativa coinciden $\vec{a}_{absoluta} = \vec{a}_{relativa}$. A los sistemas de referencia que se trasladan uniformemente los unos con respecto a los otros se les llama sistemas de referencia inerciales, cumpliéndose que la aceleración del móvil es la misma para dichos sistemas de referencia.

b) Que el movimiento de arrastre sea una rotación, en este caso:

$$\vec{v}_{absoluta} = \vec{v}_{relativa} + \vec{v}_{arrastre}$$

$$\vec{a}_{absoluta} = \vec{a}_{relativa} + \vec{a}_{arrastre} + \vec{a}_{coriolis}$$

En este caso aparece un término complementario en la aceleración debido a la rotación del sistema de referencia móvil, llamado aceleración complementario o de Coriolis $(\vec{a}_C)$

$$\vec{a}_C = 2(\vec{\omega}_{ar} \wedge \vec{v}_r)$$

Siendo $\vec{\omega}_{ar}$ la rotación del sistema de referencia y $\vec{v}_r$ la velocidad relativa del móvil puntual.

La aceleración complementaria será nula si no existe movimiento relativo $[v_r = 0]$, o cuando no existe rotación del sistema de referencia $[\omega_{ar} = 0]$, o cuando no son nulas ninguna de las anteriores pero son vectores paralelos.