UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

E.T.S. de Ingenieros Agrónomos

# Dinámica del punto

- Tres leyes de Newton
- Ley de gravitación universal
- Teorema de la cantidad de movimiento
- Campos de fuerzas
- Trabajo realizado por una fuerza. Energía cinética
- Fuerzas conservativas y energía mecánica
- Potencia

# 1ª Ley de Newton

1. Si sobre una masa no actúa ninguna fuerza, no adquiere aceleración y continúa en su estado de reposo o movimiento de traslación uniforme

$$\vec{a} = \vec{0} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{v} = \vec{0}$$

* Estaba en reposo,
y continúa en reposo

$$\vec{v} = cte$$

* Es constante el módulo,
la dirección y el sentido

* Tenía un movimiento de traslación uniforme, y continúa con el

# 1ª Ley de Newton

Los sistemas que cumplen la ley de inercia, porque están en reposo o se mueven con traslación uniforme, se denominan inerciales

Los sistemas que se trasladan con movimiento acelerado, o están dotados de un movimiento de rotación en torno a un eje, no cumplen la ley de inercia y se denominan no inerciales

La unidad de fuerza en el sistema internacional es el newton (N)

Un newton es la fuerza que ejercida sobre una masa de un kilogramo le comunica una aceleración de 1m/s$^2$

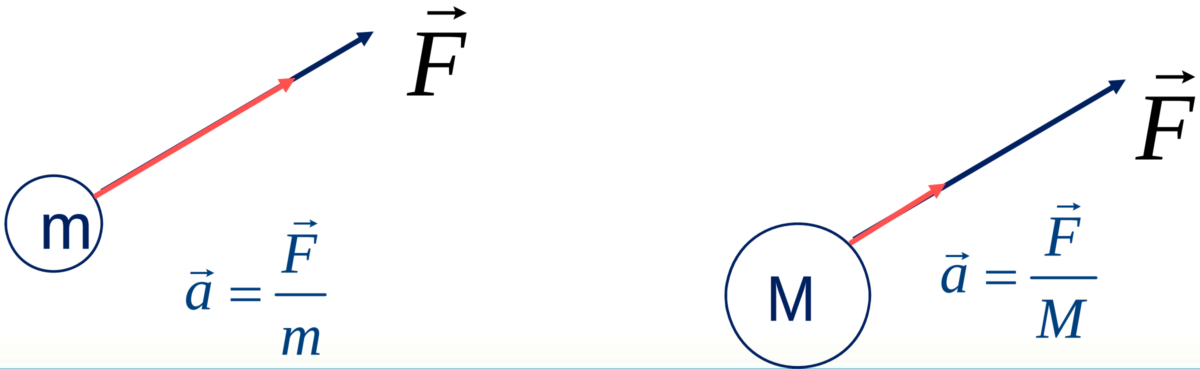
Un kilopondio (kp)es la fuerza que ejercida sobre una masa de un kilogramo le comunica una aceleración de 9,8 m/s$^2$

$$1kp = 1kg \cdot 9{,}8\frac{m}{s^2} = 9{,}8\frac{kg \cdot m}{s^2} = 9{,}8\ N$$

# 2ª Ley de Newton

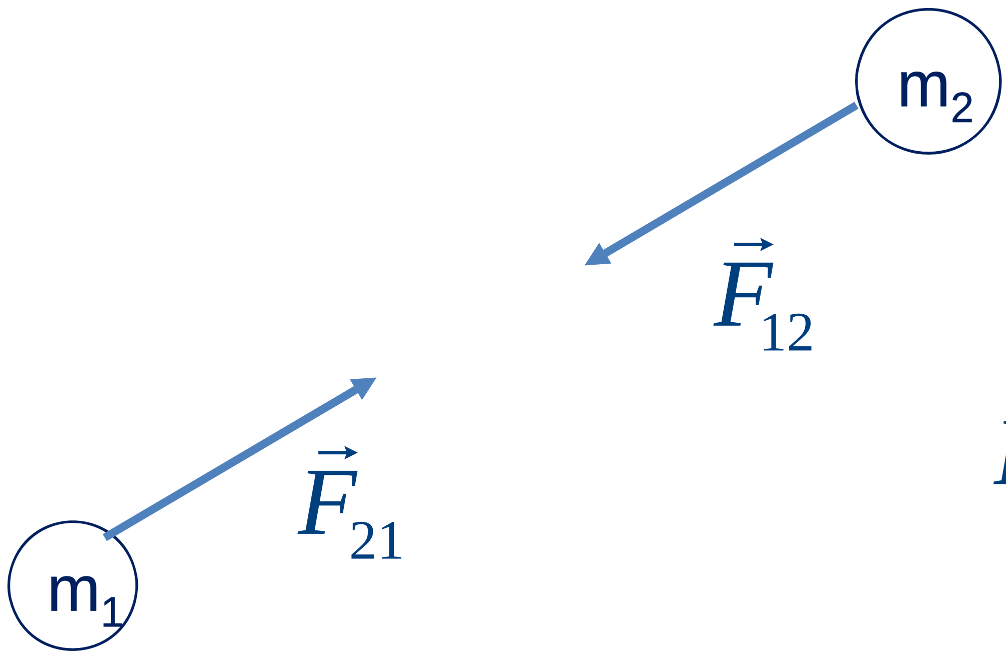
2. Si sobre una masa actúa una fuerza F, adquiere una aceleración cuyo módulo es el cociente entre la fuerza y la masa sobre la que actúa; tanto la dirección como el sentido de la aceleración son los de la fuerza

La misma fuerza actuando sobre masas distintas, les comunica aceleración distinta; a mayor masa menor aceleración



# 3ª Ley de Newton

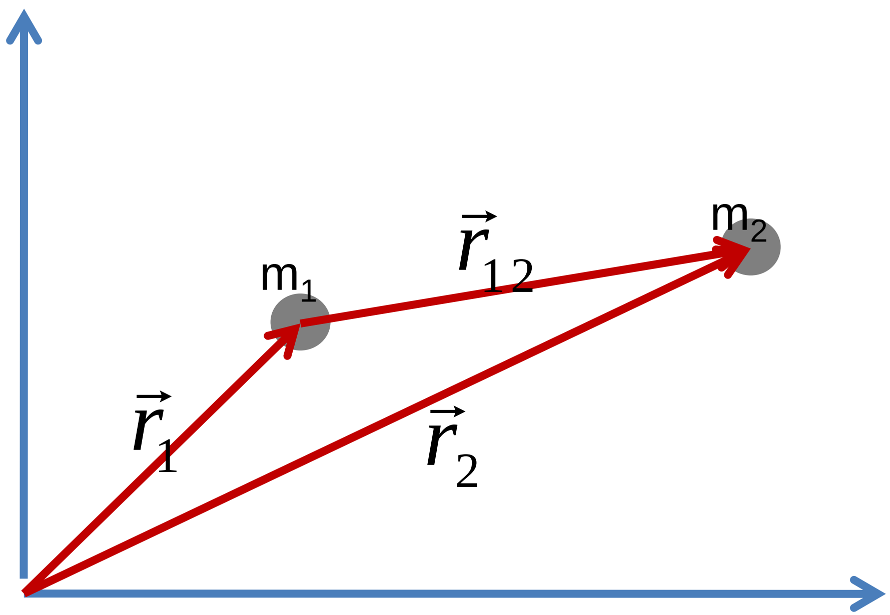
3. Si una masa $m_1$ ejerce una fuerza $F_{12}$ sobre una masa $m_2$, la masa $m_2$ ejerce sobre la masa $m_1$ una fuerza $F_{21}$ igual y de sentido contrario. Son fuerzas de igual módulo y dirección, y sentidos opuestos

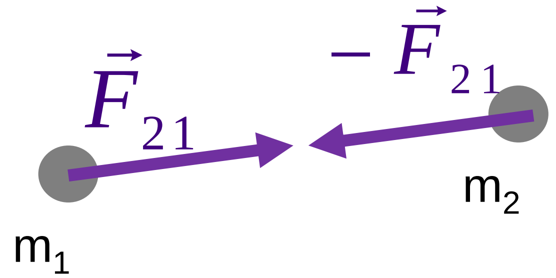



$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

# 3ª Ley de Newton

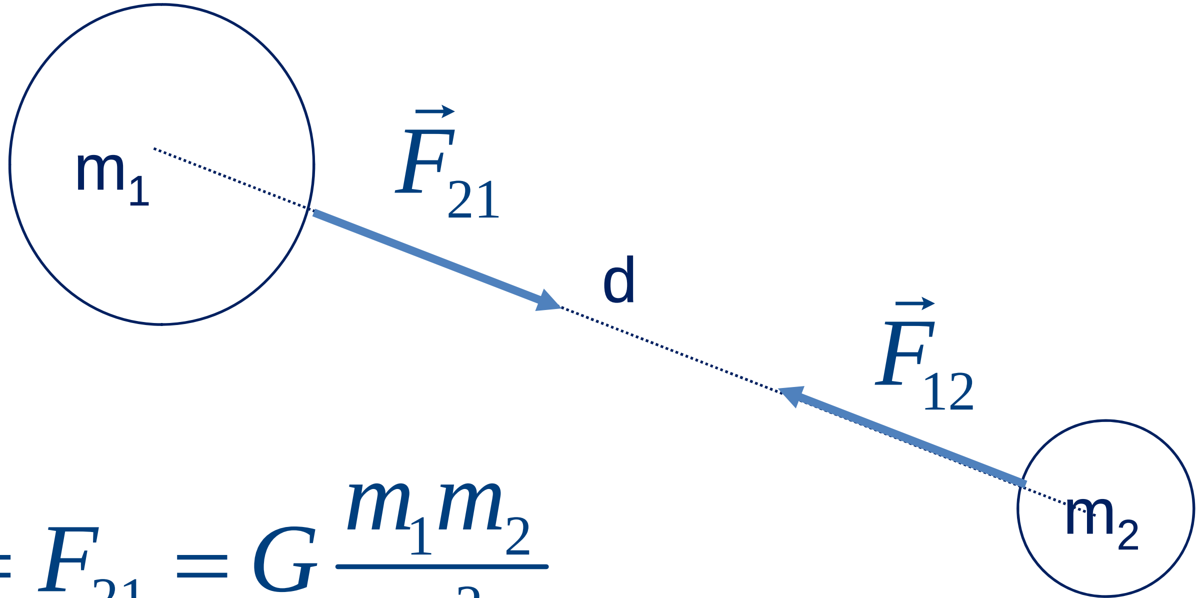
3. Si una masa $m_1$ ejerce una fuerza $F_{12}$ sobre una masa $m_2$, la masa $m_2$ ejerce sobre la masa $m_1$ una fuerza $F_{21}$ igual y de sentido contrario. Son fuerzas de igual módulo y dirección, y sentidos opuestos



# 3ª Ley de Newton

El módulo de la fuerza con que se atraen dos masas $m_1$ y $m_2$ es directamente proporcional al producto de las masas, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, d, que separa sus centros

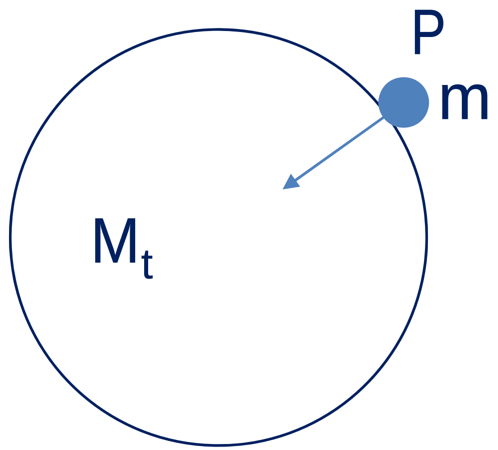



$$F_{12} = F_{21} = G\frac{m_1 m_2}{d^2}$$

# 3ª Ley de Newton

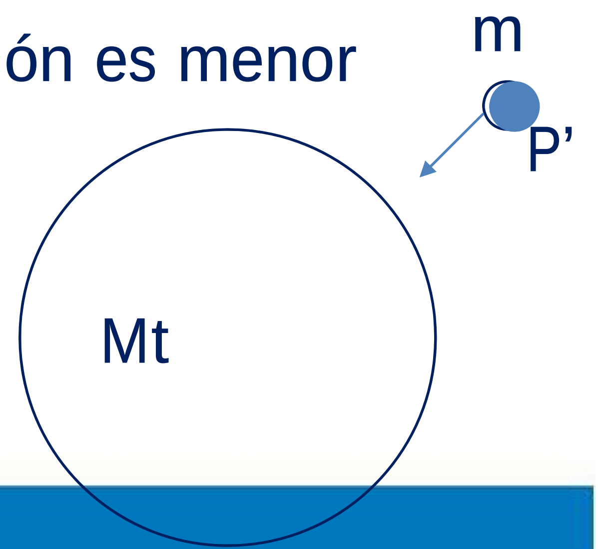
Fuerza con que la Tierra atrae a una masa m situada en la superficie

$$F_m = P = G\frac{M_t m}{R_t^2} = \left(G\frac{M_t}{R_t^2}\right)m = mg$$




Al alejarnos de la Tierra, la fuerza de atracción es menor

$$F_m = P' = G\frac{M_t m}{(R_t + h)^2} = \left[G\frac{M_t}{(R_t + h)^2}\right]m = mg_h$$



# Cantidad de movimiento

La cantidad de movimiento de movimiento de una partícula es una magnitud vectorial igual al producto de la masa de la partícula por la velocidad

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Tiene la misma dirección y sentido que la velocidad, y está aplicada en la partícula

Si la velocidad cambia con el tiempo (ya sea en módulo dirección o sentido), cambia la cantidad de movimiento

# Cantidad de movimiento

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

- En un movimiento rectilíneo uniforme, no cambia la cantidad de movimiento
- En un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado si cambia la cantidad de movimiento
- En un movimiento curvilíneo sí cambia la cantidad de movimiento
- En un movimiento circular-(uniforme o no uniforme)- sí cambia la cantidad de movimiento

# Teorema de la cantidad de movimiento

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Si la velocidad cambia con el tiempo, cambia $\vec{v}$ la cantidad de movimiento

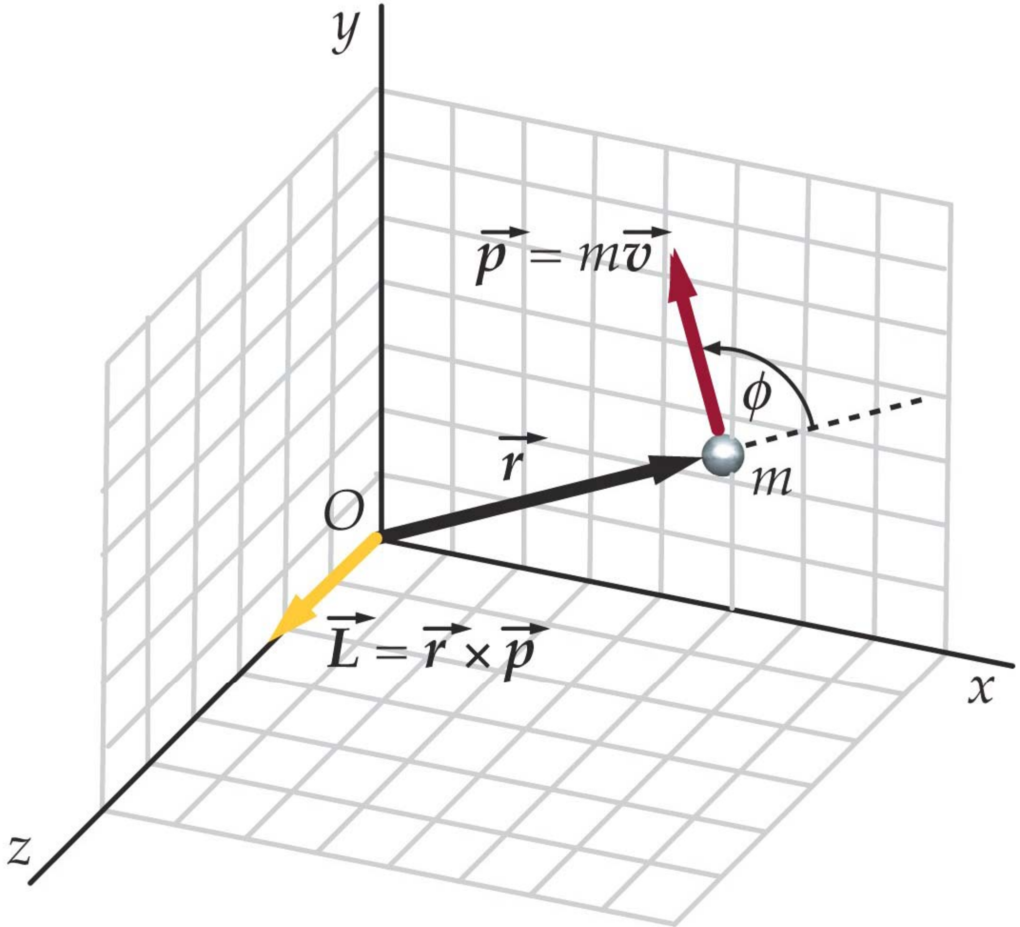
Si la velocidad cambia c $\vec{p}$ on el tiempo, en módulo o dirección o sentido, existe aceleración

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \neq \vec{0} \qquad \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} \neq \vec{0} \longrightarrow \vec{F}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}}$$

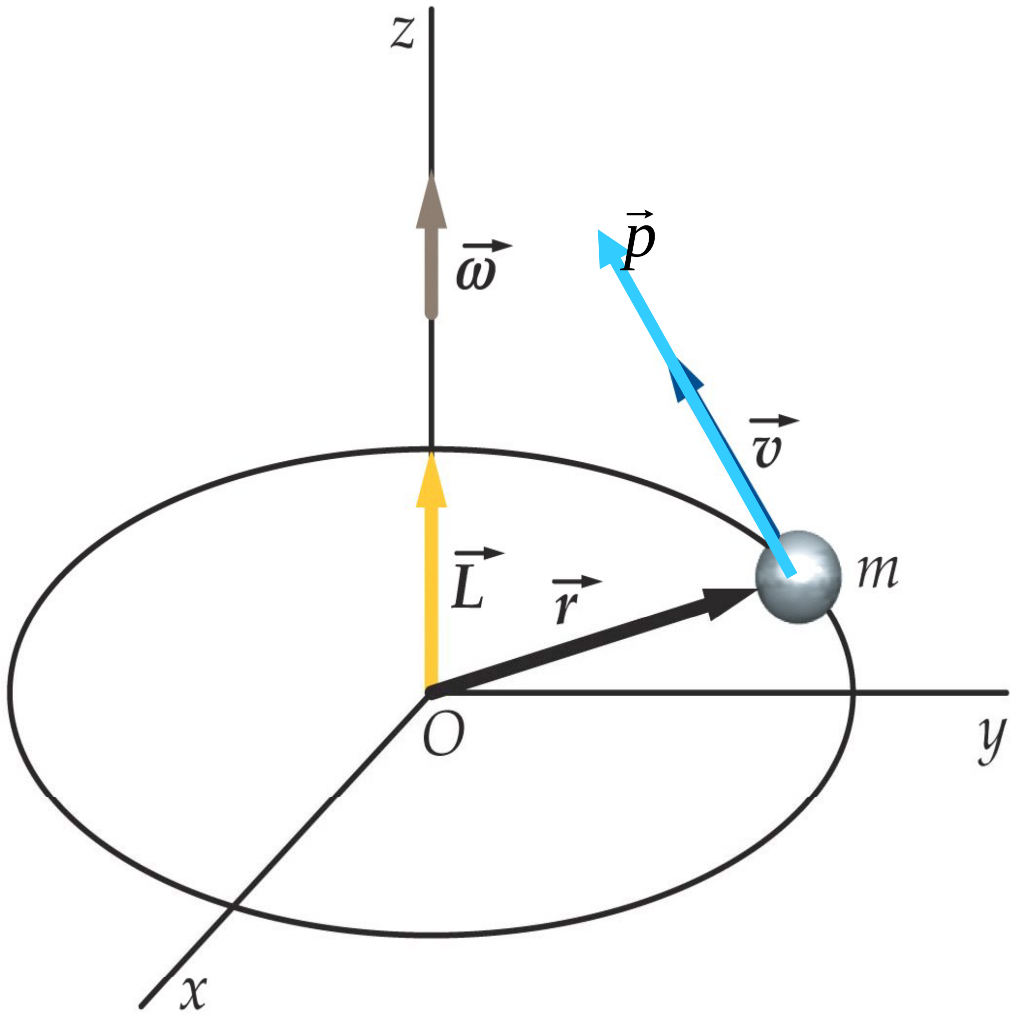
# Momento cinético respecto a un punto O

Es el momento, respecto a O, de la cantidad de movimiento




$$\vec{L}_O = \vec{r} \wedge \vec{p}$$

# Teorema del momento cinético




$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge p) =$$

$$= \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{p} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

La derivada respecto al tiempo del momento cinético respecto a un punto O es igual al momento, respecto al punto O, de la fuerza aplicada

# Ley de áreas

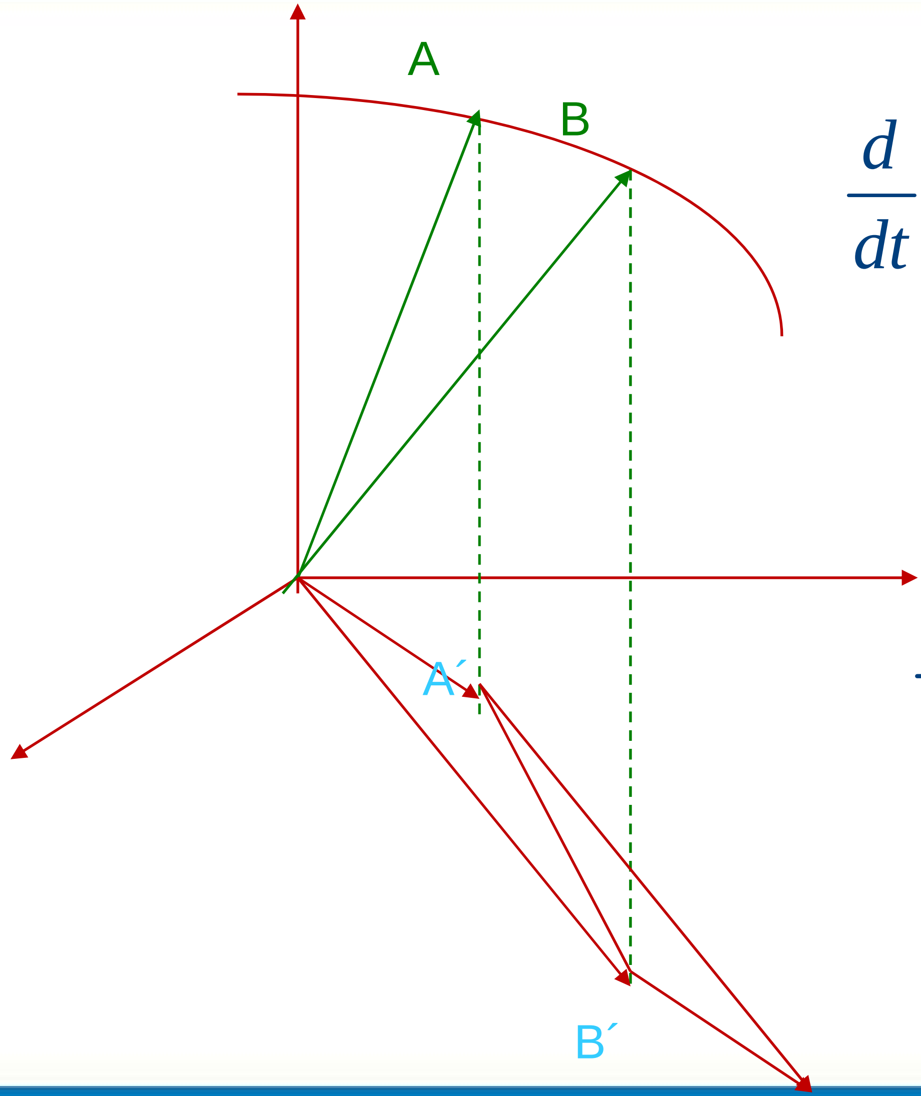
$$\vec{L}_O = L_{Ox}\vec{i} + L_{OY}\bar{j} + L_{Oz}\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{dL_{Ox}}{dt}\vec{i} + \frac{dL_{Oy}}{dt}\vec{j} + \frac{dL_{Oz}}{dt}\vec{k} = M_{Ox}\vec{i} + M_{Oy}\vec{j} + M_{Oz}\vec{k}$$

$$\frac{d}{dt} m \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

La fuerza corta a un eje. El momento axial sobre ese eje es nulo

# Ley de áreas




$$\frac{d}{dt} m \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

La fuerza corta al eje Z

$$\frac{d}{dt} m(xy' - yx') = xF_y - yF_x$$

$$dA = C dt$$

# Campo de fuerzas

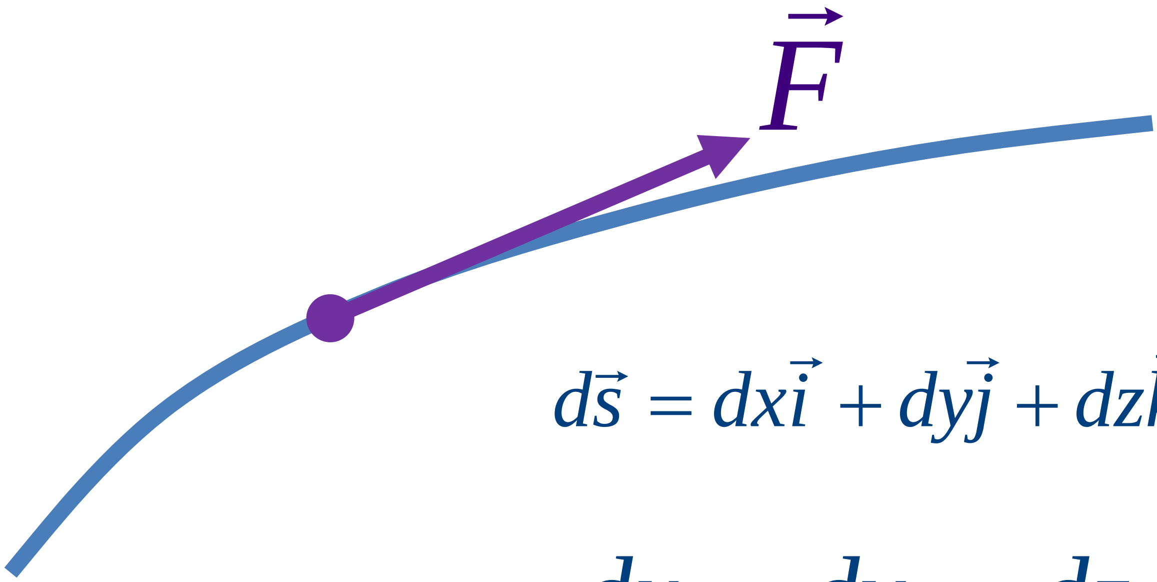
Es la región del espacio donde se dejan sentir los efectos de una fuerza. Cualquier partícula introducida en un punto de esa región experimenta una fuerza.

En una región del espacio existe un campo de fuerzas, si al introducir en ella una masa, la masa está sometida a una fuerza

El campo de fuerza se define como la fuerza por unidad de masa

# Líneas de campo o líneas de fuerza

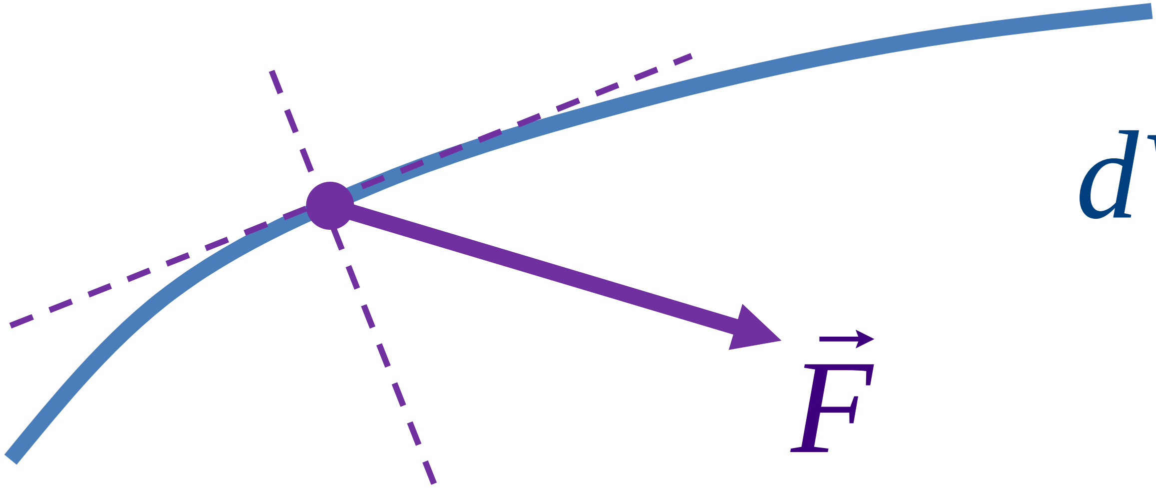
Líneas imaginarias que en cada punto son tangentes a la fuerza que actúa en ese punto




$$d\vec{s} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} = \frac{dz}{F_z}$$

# Trabajo elemental




$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

En un desplazamiento elemental dr, se realiza un trabajo dW:

Producto escalar de la fuerza por el desplazamiento elemental

La componente paralela al desplazamiento (tangencial) es la única que produce trabajo

# Trabajo

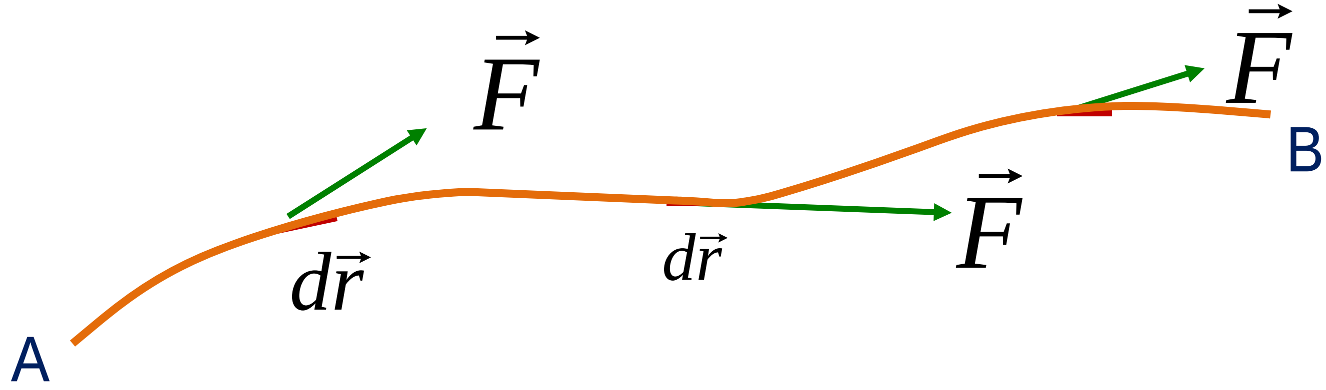
La unidad de trabajo en el sistema internacional es julio (J)

*Un julio es el trabajo que se realiza cuando se aplica una fuerza de un newton para desplazar una partícula una distancia de un metro en la misma dirección y sentido que la fuerza.*

$$1J = 1N \cdot 1m$$

¡EL TRABAJO ES UNA MAGNITUD ESCALAR!

# Trabajo

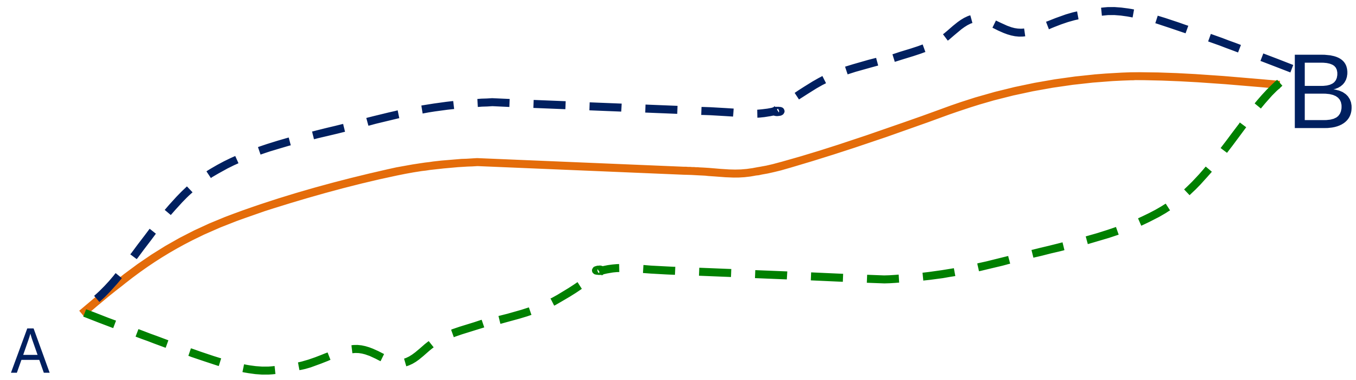



$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cdot dr \ \cos\alpha$$

El trabajo para trasladar la partícula de A a B es la suma de todos los trabajos elementales

$$W_{A \to B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

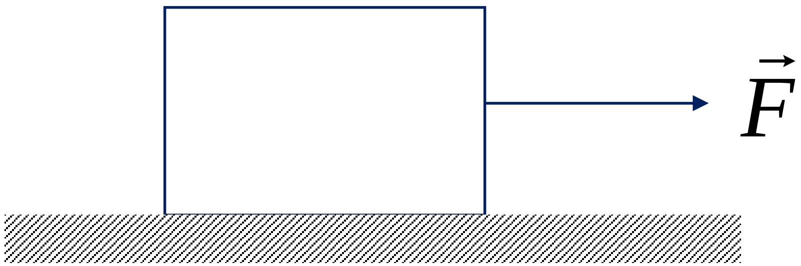
# Trabajo




¡El trabajo depende de la trayectoria!

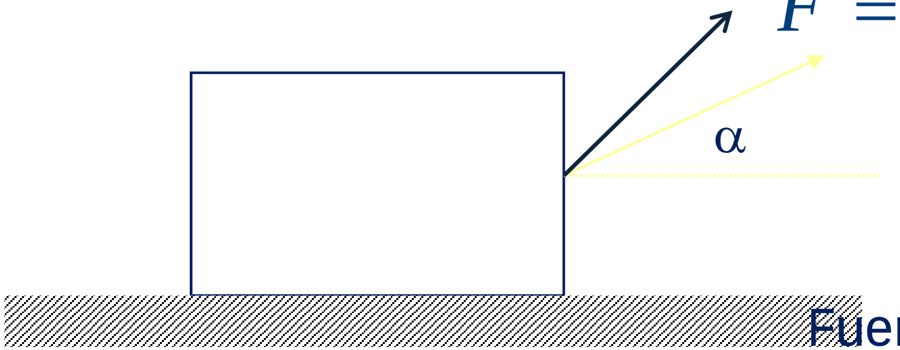
# Trabajo

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cdot dr \ \cos\alpha$$



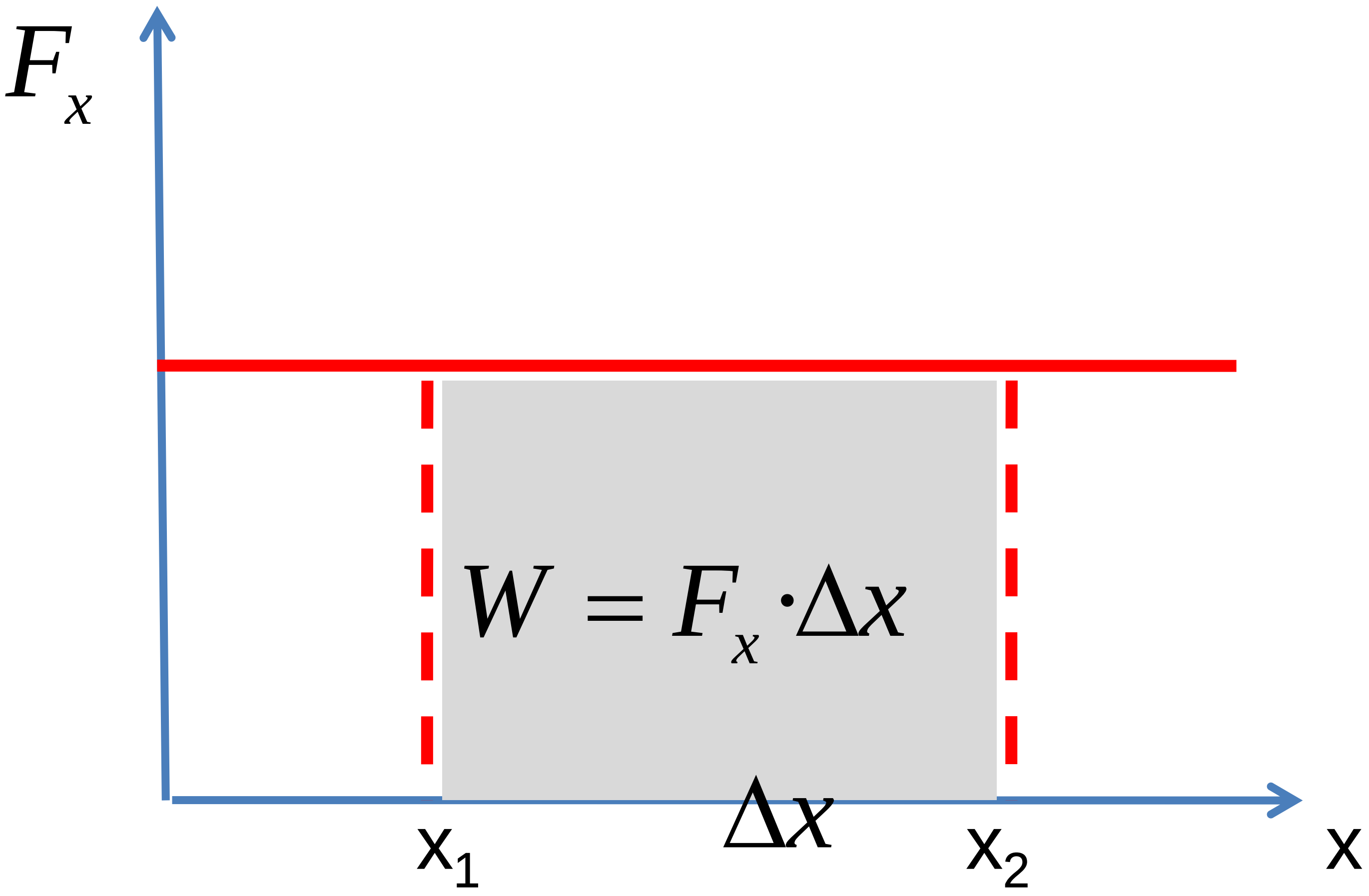

Fuerza y desplazamiento paralelos

$$\vec{F} = F\cos\alpha\,\vec{i} + F sen\alpha\,\vec{j}$$



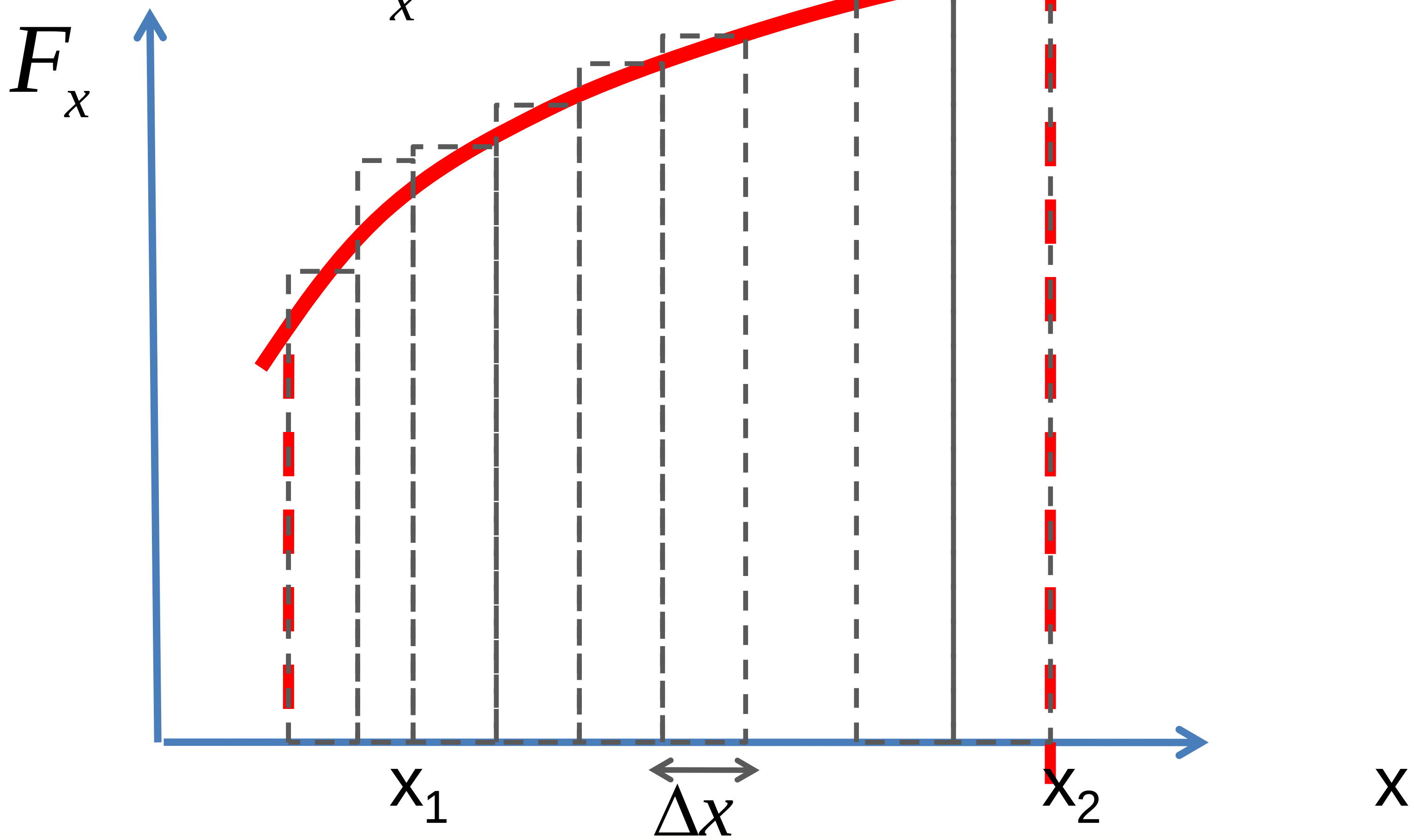

Fuerza y desplazamiento no paralelos

# Trabajo

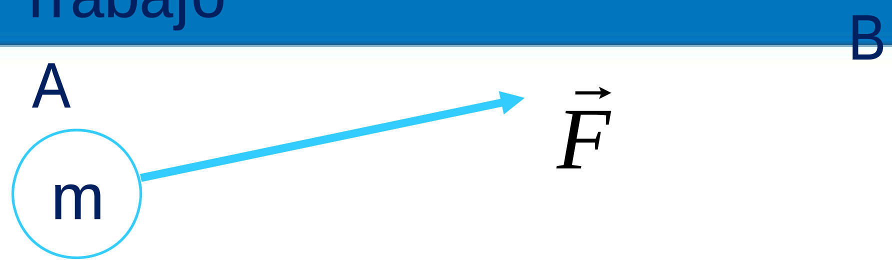


# Trabajo

$$W = F_x \cdot \Delta x$$



# Trabajo

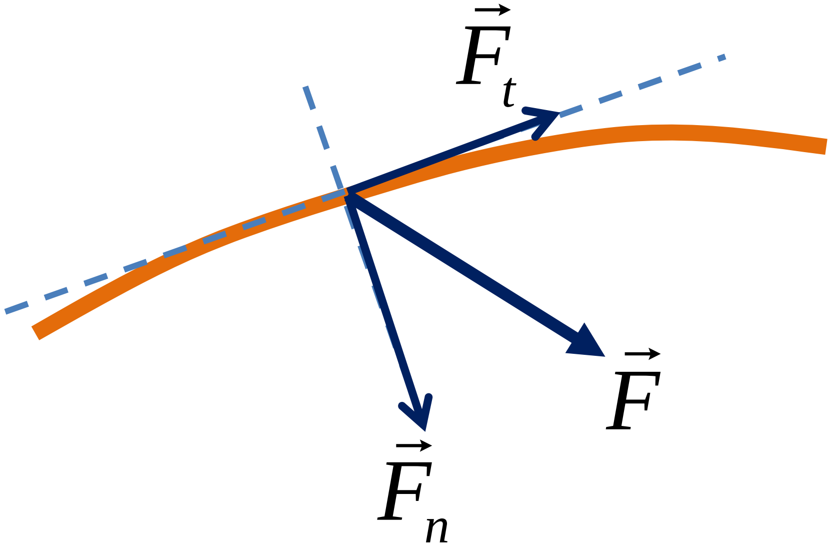



Si actúa una fuerza, la masa adquiere aceleración, y en consecuencia cambia su velocidad cuando pasa de A a B

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = \left(m\vec{a}\right)\cdot d\vec{r} = m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r} = m\vec{v}\cdot d\vec{v}$$

$$W_{A\to B} = \int_{v_A}^{v_B} m\left(\vec{v}d\vec{v}\right) = m\left(\frac{v_B^2}{2} - \frac{v_A^2}{2}\right)$$

# Trabajo




Debido a la acción de la fuerza la partícula adquiere una aceleración en el sentido del movimiento, que provoca la variación de la velocidad

$$W_{A \to B} = m\left(\frac{v_B^2}{2} - \frac{v_A^2}{2}\right)$$

El trabajo realizado cuando se traslada una partícula desde una posición A a una posición B, es igual a la variación de la energía cinética entre esas posiciones

# Trabajo

Si una fuerza es conservativa, el trabajo es independiente del camino seguido para trasladar una masa m desde una posición A a una posición B, y sólo depende de la energía potencial que existe en dichas posiciones

$$W_{A\rightarrow B} = U_A - U_B \qquad\qquad W_{A\rightarrow B} = E_{C_B} - E_{C_A}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$U_A + E_{C_A} = U_B + E_{C_B} = U + E_C = E_{mecanica} = Cte$$

# Trabajo

Si la fuerza es conservativa, se expresa como el gradiente de energía potencial, cambiado de signo

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U = -\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$$

Si la fuerza es conservativa, se conserva la energía mecánica

¡ La fuerza de rozamiento no es conservativa!

# Fuerza de rozamiento

La fuerza de rozamiento es una fuerza no conservativa, proporcional al área de las superficies en contacto, y depende de la naturaleza de las superficies

La fuerza de rozamiento se opone al movimiento, y actúa sobre las superficies en contacto

La fuerza de rozamiento es menor, o a lo sumo igual, al producto del coeficiente de rozamiento por la normal

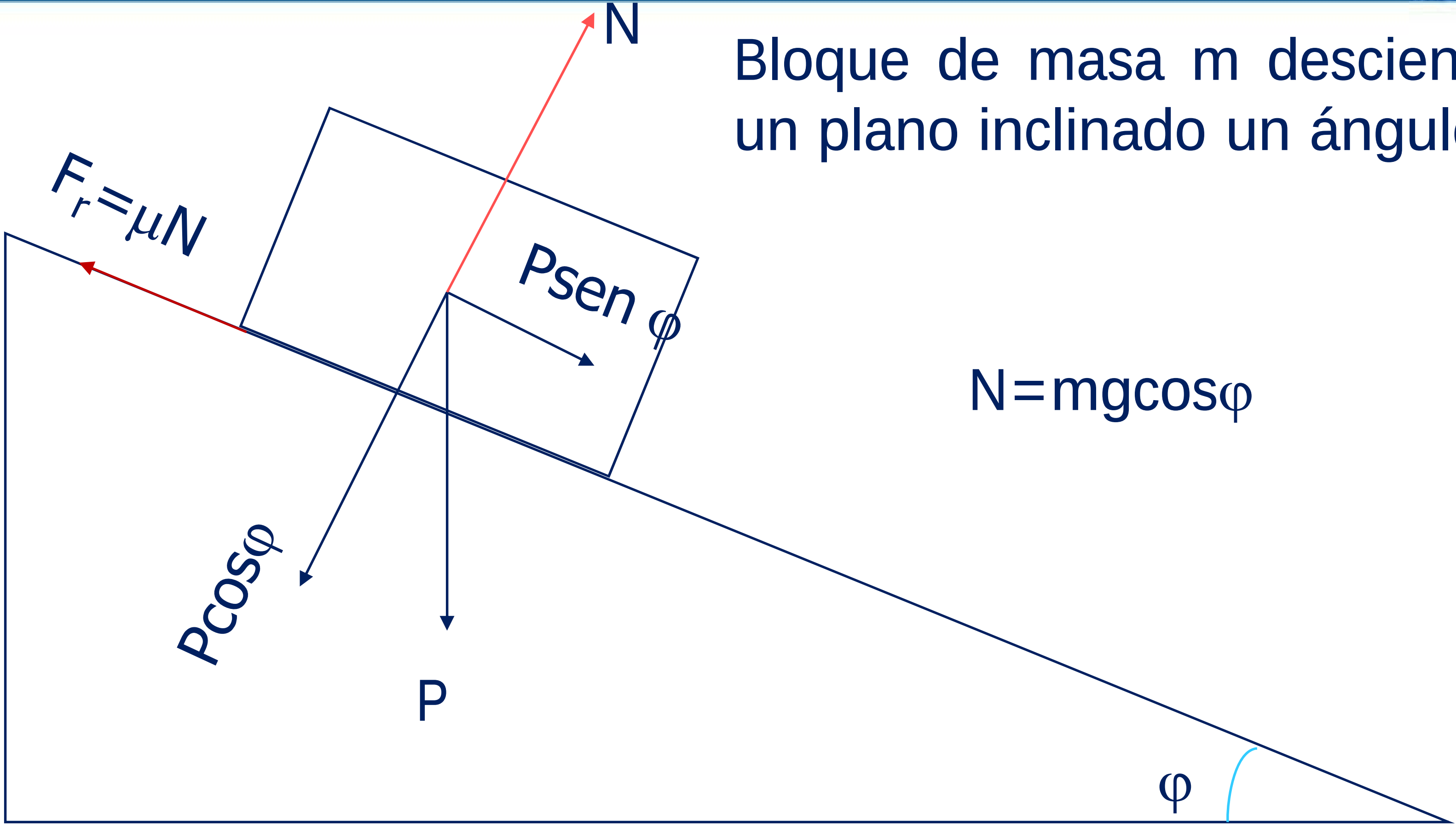
$$f_r \leq \mu N$$

# Fuerza de rozamiento

El coeficiente de rozamiento estático es el escalar que multiplicado por la normal proporciona el valor de la fuerza necesaria para poner en movimiento relativo dos cuerpos que estaban en reposo

El coeficiente de rozamiento dinámico es el escalar que multiplicado por la normal proporciona el valor de la fuerza necesaria para mantener dos cuerpos en movimiento relativo, uno respecto al otro

# Fuerza de rozamiento

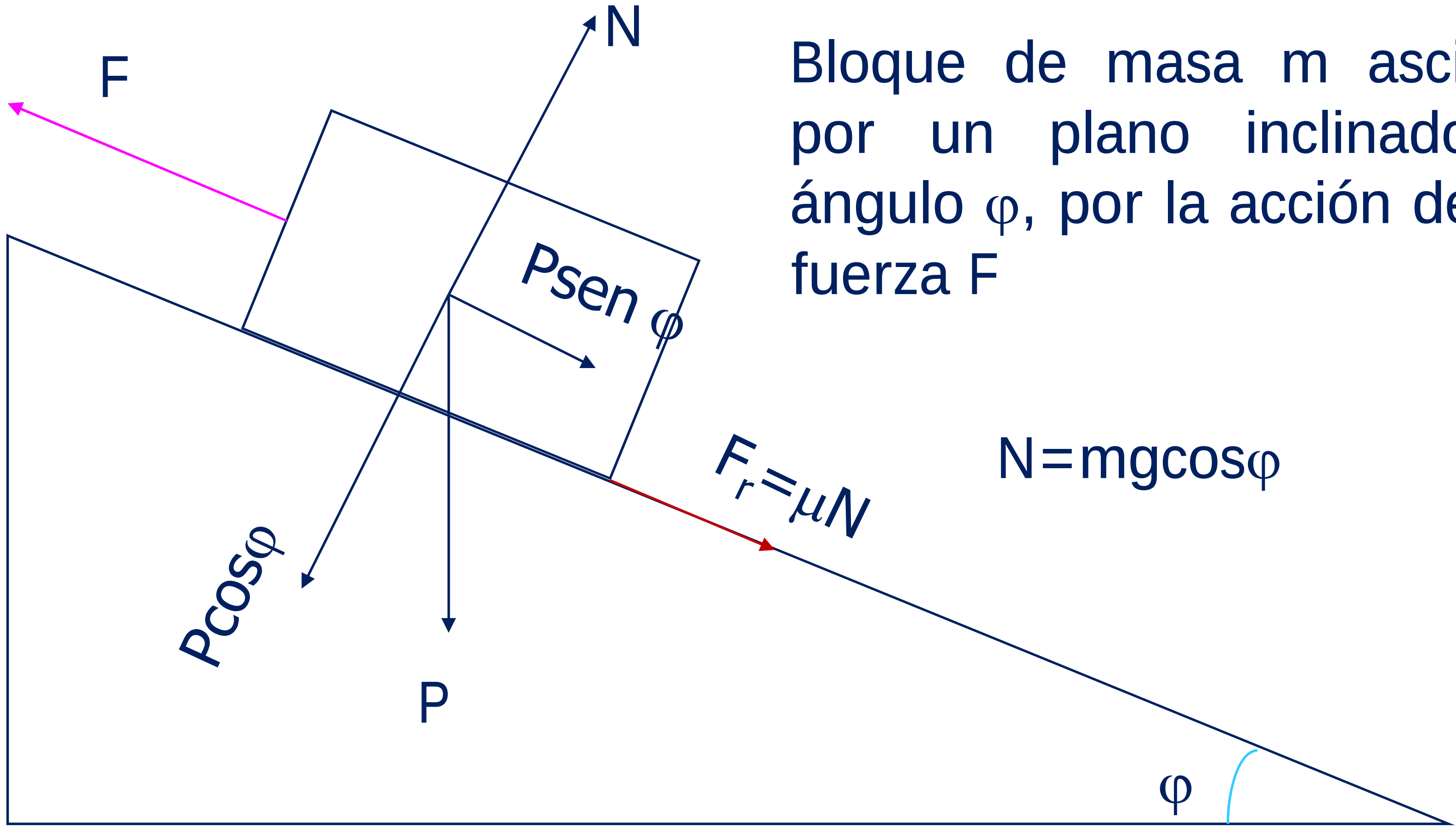



Bloque de masa m desciende por un plano inclinado un ángulo φ

N=mgcosφ

$$mgsen\varphi - F_r = mgsen\varphi - \mu mg\cos\varphi = ma$$

# Fuerza de rozamiento




Bloque de masa m asciende por un plano inclinado un ángulo φ, por la acción de una fuerza F

N=mgcosφ

$$F - mgsen\varphi - F_r = F - mgsen\varphi - \mu mg\cos\varphi = ma$$

# Potencia

Trabajo realizado en la unidad de tiempo

En un tiempo dt se realiza un trabajo dW

$$P_{inst} = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}_{inst}$$

En un tiempo $t\text{-}t_0$ e realiza un trabajo W (considerando la fuerza constante)

$$P_{media} = \frac{W}{t - t_o} = \frac{\int_{t_0}^{t} \vec{F} \cdot d\vec{r}}{t - t_o} = \vec{F} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{t - t_o} = \vec{F} \cdot \vec{v}_{media}$$

# Potencia

$$\frac{J}{s} = vatio \quad (W) = \frac{N \cdot m}{s} = \frac{\frac{kg \cdot m}{s^2} \cdot m}{s}$$

kW (kilovatio), MW (megavatio)

$$1CV = 75\frac{kp \cdot m}{s} = 75 \cdot 9,8\frac{N \cdot m}{s} = 735W$$

# Teorema de las fuerzas vivas

El trabajo realizado para trasladar una partícula de una posición A a una posición B, es igual a la variación de la energía cinética de la partícula

$$W_{A\to B} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

# Conservación de la energía mecánica

El trabajo realizado para trasladar una partícula de una posición A a una posición B, es igual a la variación de la energía cinética de la partícula

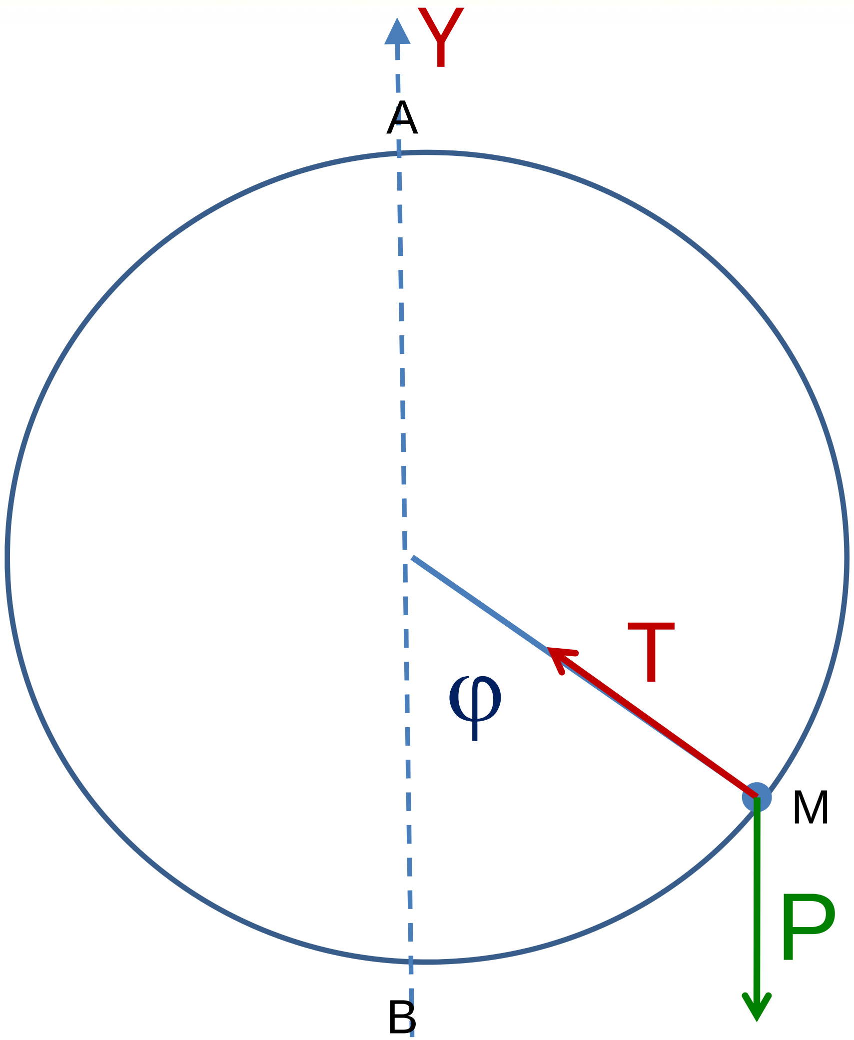
$$W_{A\to B} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

Si además la fuerza es conservativa

$$W_{A\to B} = U(A) - U(B)$$

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + U(A) = \frac{1}{2}mv_B^2 + U(B)$$

# Péndulo circular

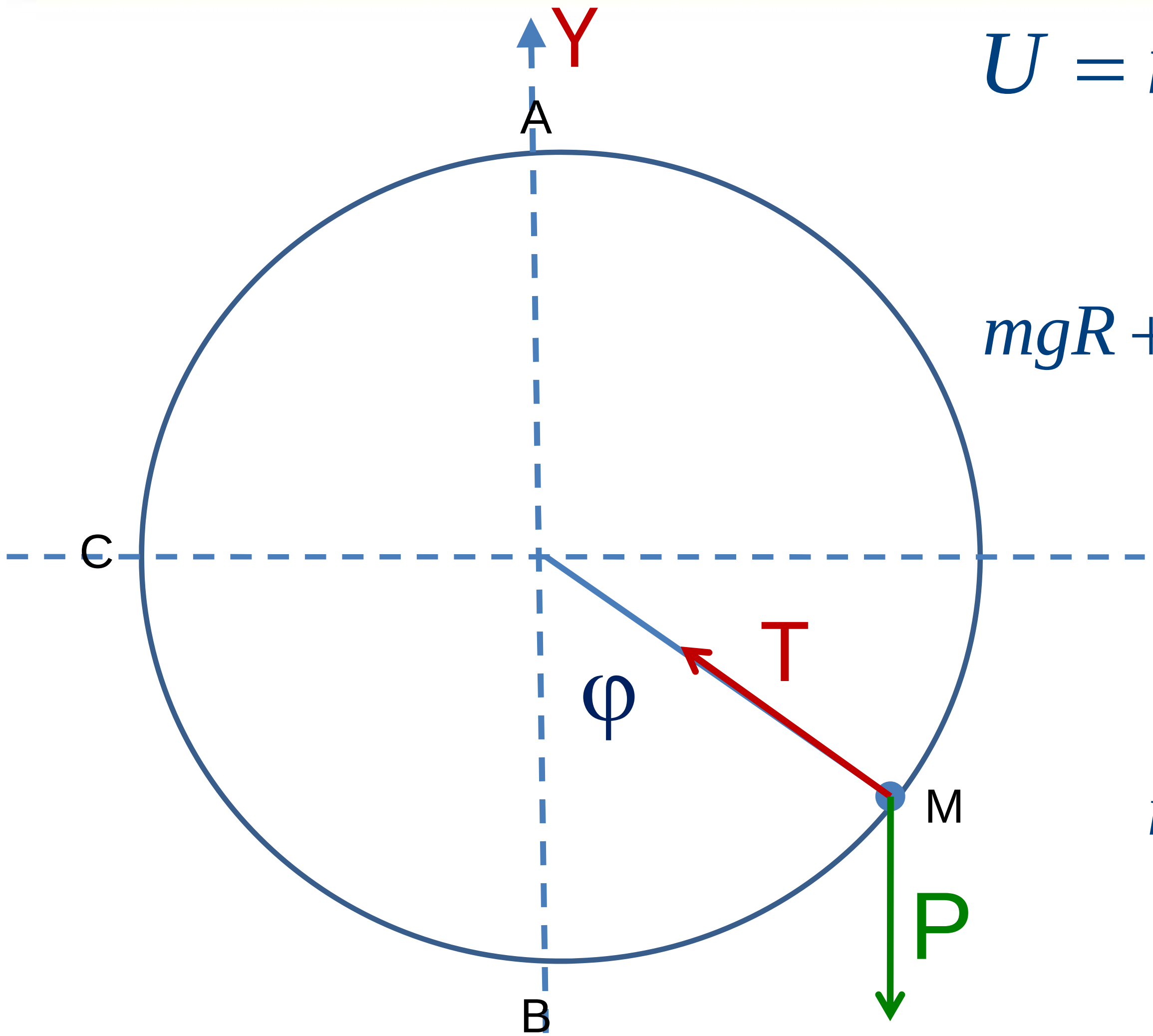



$$T - mg\cos\varphi = m\frac{v^2}{R}$$

$$T_A + mg = m\frac{v_A^2}{R}$$

$$T_B - mg = m\frac{v_B^2}{R}$$

# Péndulo circular




$$U = mgy = -mgR\cos\varphi$$

$$mgR + \frac{1}{2}mv_A^2 = -mgR + \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$mgR + \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_C^2$$