DINAMICA DEL PUNTO

Leyes de Newton

Primera ley o ley de inercia: si sobre un sistema material no actúa fuerza alguna sigue en reposo o movimiento rectilíneo uniforme si inicialmente lo estaba.

Segunda ley o ley del movimiento: si sobre un sistema material actúa una fuerza, toma una aceleración cuya magnitud o módulo es el cociente del módulo de la fuerza partido por la masa del sistema material, y su dirección y sentido es el de la fuerza.

Tercera ley o ley de acción y reacción: si un sistema material ejerce una fuerza sobre otro sistema material, éste último ejerce sobre el primero una fuerza igual en magnitud y dirección pero de sentido opuesto; el par directamente opuesto (acción, reacción) puede ser de contacto directo o de acción a distancia.

Cantidad de movimiento

Un punto material de masa m que se mueve con velocidad $\vec{v}$ posee una cantidad de movimiento (llamado también momento lineal) que se define por el vector $\vec{p}$:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

cuya dirección y sentido coinciden con los de $\vec{v}$.

Teorema de la cantidad de movimiento

"*La derivada respecto al tiempo de la cantidad de movimiento de una partícula o punto material es igual a la resultante de las fuerzas que actúan sobre dicho punto o partícula móvil"*, constituye el teorema de la cantidad de movimiento. Es otra forma de enunciar la segunda Ley de Newton.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}$$

Momento cinético.

Es el momento con respecto a un punto O de la cantidad de movimiento de una partícula móvil.

$$\vec{M}_o(\vec{p}) = O\vec{A} \wedge \vec{p}$$

siendo A la posición del punto móvil en un instante determinado de su movimiento.

Teorema del momento cinético

“La derivada respecto al tiempo del momento cinético respecto a un punto O, es igual al momento de la fuerza con respecto al punto O”, constituye el teorema del momento cinético.

$$\frac{d\left[O\vec{A}\wedge\vec{p}\right]}{dt}=\vec{V}\wedge\vec{p}+O\vec{A}\wedge\vec{F}=O\vec{A}\wedge\vec{F}$$

Fuerzas centrales

Son fuerzas cuya línea de acción pasa siempre por un punto fijo llamado centro de fuerzas y es función únicamente de la distancia a dicho punto. Son fuerzas centrales la gravitacional, la recuperadora elástica y la eléctrica

Campo de Fuerzas

En una región del espacio existe campo de fuerzas si al colocar en un punto de ese espacio un cuerpo de prueba, se ejerce sobre él una fuerza. Por tanto, las fuerzas dependen sólo de la posición (x,y,z) del punto de manera unívoca, es decir que a cada punto se le asocia una fuerza. El campo de fuerzas es vectorial y la dirección e intensidad en cada punto es la de la fuerza que aparece sobre la unidad de prueba. Las fuerzas centrales determinan un campo de fuerzas.

Líneas de fuerza

Son las curvas imaginarias que en cada punto de las mismas son tangentes a la fuerza del campo en ese punto. Si en un punto (x,y,z) actúa una fuerza $\vec{F}=F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k}$ y el vector tangente en ese punto es $d\vec{s}=dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k}$, de la definición de línea de fuerza se deduce que estos dos vectores tienen que ser paralelos, es decir, tienen que tener una proporcionalidad entre sus componentes:

$$\lambda=\frac{dx}{F_x}=\frac{dy}{F_y}=\frac{dz}{F_z}$$

de donde se obtienen las dos ecuaciones diferenciales que definen una línea de fuerza, su integral nos dará la ecuación de la curva que define la línea de fuerza.

Trabajo.

Se define el trabajo elemental realizado por una fuerza $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$ que actúa sobre una partícula, como el producto escalar de la fuerza $\vec{F}$ por el desplazamiento elemental $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

Si $\vec{F}$ fuera perpendicular a $d\vec{r}$ el trabajo es nulo.
El trabajo total, se obtiene por integración de la anterior, es decir la circulación del vector fuerza a través de la trayectoria seguida por la partícula para pasar de un punto A a otro B de la misma.

$$W_{P\rightarrow M} = \int_P^M F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

Potencial

Si en cada punto del espacio donde está definido un campo de fuerzas existe una función escalar U(x,y,z) tal que al derivarla se obtiene la fuerza que actúa en dicho punto cambiada de signo, a esa función se le llama potencial.
Las relaciones entre las componentes de la fuerza y el potencial son:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}; F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}; F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

Se dice que el campo de fuerzas deriva de un potencial o que es conservativo.
El trabajo realizado por la fuerza es:

$$W_{A\rightarrow B} = \int_A^B F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\int_A^B \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = -\int_A^B dU = U_A - U_B$$

Puesto que la función subintegral es la diferencial exacta de $U(x,y,z)$, el trabajo sólo depende de los valores inicial y final del potencial y no depende de la trayectoria, es independiente del camino seguido y sólo depende de la posición inicial y final.
El trabajo elemental en todo campo de fuerzas conservativo es igual a la diferencial exacta del potencial cambiada de signo

$$dW = -dU$$

Superficies equipotenciales

Son las superficies que tienen igual valor del potencial por lo que verifican que la función $U(x,y,z)$ es constante

$$U(x,y,z) = k$$

A cada valor de k le corresponde una superficie equipotencial. La línea de fuerza es en cada punto perpendicular a la superficie equipotencial que pasa por ese punto.

La función potencial es escalar, los potenciales se suman algebraicamente. Los campos de fuerza son funciones vectoriales, éstos se suman vectorialmente.

Cuando las fuerzas derivan de un potencial diremos que la fuerza es el gradiente del potencial cambiado de signo:

$$\vec{F} = -\,\mathrm{gr}\vec{\mathrm{a}}\,U = -\vec{\nabla}U$$

donde el operador nabla es el vector simbólico:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

Potencia instantánea

Es el cociente entre el trabajo elemental dW realizado en un tiempo dt, y el tiempo empleado en ello. Puede expresarse como el producto escalar de la fuerza por la velocidad.

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F}\cdot d\vec{s}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

Teorema de las fuerzas vivas. Cuando sobre una partícula de masa m actúa una fuerza $\vec{F}$ le provoca un desplazamiento elemental $d\vec{r}$, siendo el trabajo elemental realizado por dicha fuerza:

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = m\cdot\vec{a}\cdot d\vec{r} = md\vec{v}\frac{d\vec{r}}{dt} = m\cdot\vec{v}\cdot d\vec{v} = \frac{m}{2}dv^2$$

El trabajo total para pasar desde una posición A donde la velocidad es v_A a otra posición B donde la velocidad es v_B será:

$$W_{A\to B} = \int_{v_A}^{v_B}\frac{m}{2}dv^2 = \frac{m}{2}(v_B^2 - v_A^2)$$

A la cantidad $\frac{mv^2}{2}$ se le llama energía cinética de la partícula o semifuerza viva.

El teorema de las fuerzas vivas puede enunciarse “*El trabajo total para pasar una partícula desde una posición a otra, es igual a la variación de la energía cinética*”.

Teorema de la conservación de la energía mecánica. Si una partícula se mueve en un campo de fuerzas conservativo se tiene:

$$dW = -dE_p = \frac{m}{2}dv^2$$

cuya integración proporciona

$$W_{A\to B} = \left(E_p\right)_A - \left(E_p\right)_B = \frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2}$$

de donde, agrupando términos

$$\left(E_p\right)_A + \frac{mv_A^2}{2} = \left(E_p\right)_B + \frac{mv_B^2}{2} = E_m = cte$$

El teorema de conservación de la energía mecánica se enuncia *"Cuando una partícula se mueve en un campo de fuerzas conservativo la energía mecánica, suma de energía cinética E_c más energía potencial E_p, permanece constante"*.

La energía potencial E_p es el producto de la función potencial U por la masa de la partícula

Teorema generalizado del trabajo-energía. Cuando sobre una partícula coinciden fuerzas conservativas y fuerzas no conservativas realizando trabajo, la energía mecánica total de la partícula no permanece constante.

Sea $\vec{F}_1$ la resultante de las fuerzas conservativas y $\vec{F}_2$ la resultante de las fuerzas no conservativas, el trabajo total realizado será la variación de energía cinética:

$$W_{Total} = \int \vec{F}_1 d\vec{r} + \int \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} = \Delta E_C = \left(E_c\right)_B - \left(E_c\right)_A$$

Para las fuerzas conservativas $\int F_1 \cdot d\vec{r} = \left(E_p\right)_A - \left(E_p\right)_B$

Para las no conservativas $\int \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} = W_{no\ conserv.}$

por lo que

$$W_{no\ conserv.} = (E_{C_B} + E_{pB}) - (E_{C_A} + E_{pA}) = \Delta E_m = E_{m_B} - E_{m_A}$$

El trabajo realizado por las fuerzas no conservativas que actúan sobre una partícula es igual a la variación de la energía mecánica.

DINAMICA DE SISTEMAS

Movimiento del centro de gravedad de un sistema material

La posición del centro de gravedad de un sistema de partículas viene definido por

$$M\vec{r}_G = \sum_{j=1}^{n} m_j \vec{r}_j$$

donde M es la masa total del sistema y $\vec{r}_G$ el vector posición desde el origen elegido hasta el centro de gravedad.

Derivando dos veces la ecuación respecto al tiempo se obtiene:

$$\vec{F}_{neta,ext} = M \cdot \vec{a}_G$$

El centro de gravedad de un sistema material se mueve como lo haría una partícula cuya masa sea igual a la total del sistema, bajo la acción de la fuerza externa resultante que actúa sobre el sistema material.

Cantidad de movimiento de un sistema material

Derivando la ecuación de la posición del centro de gravedad respecto al tiempo, obtenemos la cantidad de movimiento total del sistema que es igual al producto de la masa total por la velocidad del centro de gravedad.

$$\vec{p} = M\frac{d\vec{r}_G}{dt} = M \cdot \vec{v}_G = \sum_{j=1}^{n} m_j \vec{v}_j$$

Si la fuerza externa resultante que actúa sobre un sistema es nula, la cantidad de movimiento total del sistema material permanece constante. Esta ley es aplicable a cualquier sistema aislado de sus alrededores, como el estudio de choque entre dos sistemas materiales.

Impulso de una fuerza

El impulso de una fuerza es un vector definido por la integral

$$\vec{I} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} \cdot dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot dt = \Delta\vec{p}$$

El área bajo la curva de $\vec{F}$ en función del tiempo es la magnitud del impulso de la fuerza.

Momento cinético o momento angular

El momento cinético total de un sistema material es la suma de los momentos cinéticos con respecto a un punto fijo O de cada una de las partículas.

$$\vec{L}_0 = \sum_{j=1}^{n} \vec{r}_j \wedge m_j \vec{v}_j$$

Si el sistema material sólo se traslada, en cualquier instante del movimiento la velocidad que lleva cada partícula es la misma, y el momento cinético total se reduce al estudio del momento cinético de una partícula de masa M situada en el centro de gravedad $\vec{L}_0 = M\vec{r}_G \wedge \vec{v}_G$.

Derivando esta expresión respecto al tiempo

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = M\vec{r}_G \wedge \vec{a}_G = \vec{r}_G \wedge \vec{F}_{ext}$$

Esta expresión constituye el teorema del momento cinético para sistemas, que puede enunciarse: *La derivada respecto al tiempo del momento cinético total es igual al momento de la fuerza externa, aplicada en el centro de gravedad.*

Si el sistema material sólo rota, la velocidad de cada partícula en un instante determinado es diferente, puesto que depende de su distancia r_j al eje de rotación, lo que es igual en cada instante para todas las partículas es la velocidad angular ω de rotación. El momento cinético total, cuando el sistema rota es:

$$L_{eje} = \sum m_j r_j^2 \omega = I_{eje} \cdot \omega$$

Donde I es el momento de inercia del sistema material con respecto a un eje fijo alrededor del cual rota o gira el sistema material, válida también si el eje se mueve de tal modo que permanece paralelo a sí mismo, tal como un cuerpo que ruede a lo largo de un plano. Derivando respecto al tiempo se obtiene el teorema del momento cinético

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{r}_j \wedge \vec{F}_{extj} = \textit{Momento resultante de las fuerzas externas} = \vec{C}$$

$$C_{eje} = \frac{d(I_{eje}\omega)}{dt} = I_{eje}\frac{d\omega}{dt} = I_{eje} \cdot \alpha$$

Esta es la ecuación fundamental para la rotación de un sólido rígido *(I =cte)* alrededor de un eje fijo. El momento de inercia I en un movimiento de rotación es análogo a la masa M en un movimiento de traslación.

En un sistema aislado, el momento resultante de las fuerzas externas es nula y, por tanto, el momento cinético se conserva: $I\omega = cte$

Energía cinética de un sistema material

La energía cinética total es la suma de las energías cinéticas de cada una de las partículas:

$$E_C = \frac{1}{2}\sum m_j v_j^{\ 2}$$

Si el sistema material sólo se traslada, la ecuación es: $E_C = \frac{1}{2}Mv_G^2$

Si el sistema material sólo rota, la ecuación es: $E_C = \frac{1}{2}I\omega^2$

Si el sistema material se traslada y rota simultáneamente la ecuación es $E_C = \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$

Casos particulares de rotación de sólidos rígidos

La ecuación fundamental de la dinámica de rotación es:

$$C_{eje} = I_{eje} \cdot \alpha$$

Consideraremos dos casos particulares de rotación de sólidos rígidos: rodadura y péndulo físico.

Rodadura: cuando un cuerpo rodante (esfera, cilindro, aro), rueda sin deslizar por una superficie plana sus movimientos de rotación y traslación están relacionados. La velocidad del centro de gravedad está relacionada con la velocidad angular por la condición:

$$v_G = \omega R$$

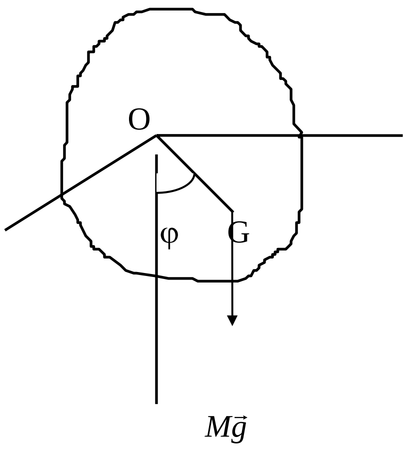
La aceleración está igualmente relacionada con la aceleración angular:

$$a_G = \alpha R$$

El punto de contacto está instantáneamente en reposo respecto a la superficie, luego, si esta superficie ejerce una fuerza de rozamiento sobre el cuerpo, se trata de un rozamiento estático y no se disipa energía.

La rodadura puede considerarse como la suma de dos movimientos: una rotación alrededor de un eje que pasa por el centro de gravedad más una traslación con una velocidad igual a ωR; o bien se puede considerar también como una rotación pura alrededor de un eje que pasa por el punto de contacto, y que se mueve paralelamente a sí mismo.

Péndulo físico. Es cualquier cuerpo rígido que rota alrededor de un eje horizontal que no pasa por su centro de gravedad y que se separa ligeramente de la posición de equilibrio. Consideremos un sólido suspendido de punto O situado a una distancia d del centro de gravedad y desplazado de su posición de equilibrio un ángulo φ. El momento respecto al centro de suspensión O es Mgdsenφ en el sentido decreciente de φ.



Aplicando la ecuación fundamental de la dinámica de rotación,

$$I\varphi'' = -Mgd\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

I es el momento de inercia respecto a un eje horizontal que pasa por O. Por tanto $I\varphi'' + Mgd\,\mathrm{sen}\,\varphi = 0$

Para desplazamientos pequeños $\mathrm{sen}\,\varphi$ se puede aproximar a φ, y se tiene

$$I\varphi'' + Mgd\varphi = 0$$

$$\varphi'' + \frac{Mgd}{I}\varphi = 0$$

$$\varphi'' + \omega^2\varphi = 0$$

por tanto el movimiento es armónico simple, siendo su período $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{Mgd}}$