ESTÁTICA

Equilibrio de un punto material

La condición necesaria y suficiente para el equilibrio de una partícula o punto material es que la resultante de las fuerzas aplicadas sobre el punto sea nula.

$$\vec{F} = 0 = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} \begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ F_z = 0 \end{cases}$$

Equilibrio de un sólido

La condición necesaria y suficiente para que un sólido esté en equilibrio es que las fuerzas exteriores formen un sistema de vectores deslizantes nulo, es decir, que la resultante y el momento resultante en un punto cualquiera del espacio deben ser nulos.

$$\vec{R} = 0 = R_x\vec{i} + R_y\vec{j} + R_z\vec{K}$$

$$\vec{C}_0 = 0 = C_{OX}\vec{i} + C_{OY}\vec{j} + C_{OZ}\vec{k}$$

Constituyen 6 condiciones o ecuaciones:

$$R_x = R_y = R_z = 0$$

$$C_{OX} = C_{OY} = C_{OZ} = 0$$

Estabilidad del equilibrio

Para determinar la estabilidad del equilibrio de un cuerpo se separa ligeramente de la posición de equilibrio y se deja que actúen las fuerzas aplicadas. Si el cuerpo vuelve a su posición primitiva, se encuentra en equilibrio estable; si el cuerpo se aleja de la posición primitiva, se encuentra en equilibrio inestable y si el cuerpo permanece en reposo, se encuentra en equilibrio indiferente.

Si el cuerpo está en equilibrio bajo la acción de fuerzas conservativas, la resultante de las fuerzas que actúan sobre el mismo es nula, y como éstas derivan de un potencial *V(x,y,z)*, equivale a decir que la derivada del potencial V es nulo; por tanto existen posiciones para las que el potencial es máximo o mínimo, verificando que el equilibrio será estable para las posiciones en el que V sea mínimo; el equilibrio será inestable cuando V sea máximo y el equilibrio será indiferente cuando *U* sea constante.

Centro de gravedad

El centro de gravedad de un sistema material es aquel punto geométrico G en el que si estuviera concentrada todo el peso del sistema material, produciría el mismo momento que la suma de todos los momentos de los pesos de cada punto material perteneciente al sistema material, se cumple el teorema de Varignon:

$$\vec{OG} \wedge \vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{OA_j} \wedge \vec{P_j}$$

siendo $\vec{r}_G = \vec{OG}$ el vector posición del peso del sistema, $\vec{P}$ la resultante o peso del sistema, $\vec{r}_j = \vec{OA_j}$ vector posición del punto material j y $\vec{P_j}$ = peso de la partícula o punto j.

El vector de posición del centro de gravedad por la expresión

$$\vec{r}_G = \frac{\sum_{j=1}^{n} m_j \vec{r}_j}{M}$$

y las coordenadas del centro de gravedad son

$$x_G = \frac{\sum_{j=1}^{n} m_j x_j}{M} \quad ; \; y_G = \frac{\sum_{j=1}^{n} m_j y_j}{M} \quad ; z_G = \frac{\sum_{j=1}^{n} m_j z_j}{M} \quad M = \sum_{j=1}^{n} m_j$$

Si el sistema material tiene distribución continua de masa, se sustituye la por integral:

$$x_G = \frac{\int xdm}{M}; \; y_G = \frac{\int ydm}{M}; \; z_G = \frac{\int zdm}{M}$$

Si la masa está distribuida a lo largo de una curva, el elemento diferencial de masa es $dm = \lambda ds$, siendo λ la densidad lineal (kg/m); ds es el elemento diferencial de arco de la curva y la integral se calcula a lo largo de la curva.

Si la masa está distribuida a lo largo de una superficie, el elemento diferencial de masa es $dm = \sigma \cdot dA$, siendo σ la densidad superficial (kg/m^2); dA es el elemento diferencial de área y la integral se extiende a dicha superficie.

Si la masa está distribuida a lo largo de un volumen, el elemento diferencial de masa es $dm = \rho \cdot dV$, siendo ρ la densidad volumétrica (kg/m^3); dV es el elemento diferencial de volumen, y la integral se extiende a todo el volumen.

El centro de gravedad es único para un determinado sistema material, e independiente de la orientación del mismo; por él pasa siempre el peso de dicho sistema.

El centro de gravedad de un sistema formado por varios subsistemas se obtiene considerando el sistema como discreto, y considerando la masa de cada subsistema localizada en su respectivo centro de gravedad.
Si el sistema material tiene algún elemento de simetría (eje o plano) su centro de gravedad está situado sobre dicho eje o plano.

Los teoremas de Guldin se utilizan para determinar el centro de gravedad de curvas y superficies planas homogéneas de las que se conoce la superficie y volumen de revolución respectivos que generan al girar en torno a un eje contenido en su plano.

Teorema 1. *El área A de la superficie de revolución generada al girar una curva plana homogénea de longitud L alrededor de un eje coplanario con ella y que no la corte, es igual al producto de la longitud de la curva por la longitud de la circunferencia que describe el centro de gravedad al girar.*

Teorema 2. *El volumen del sólido de revolución generado al hacer girar una superficie plana homogénea de área A alrededor de un eje coplanario y que no la corta, es igual al producto del área de dicha superficie por la longitud de la circunferencia que describe el centro de gravedad al girar.*

Momentos de inercia

Momento de inercia de una masa puntual (*m*) respecto a un punto, recta o plano, es el producto de la masa por el cuadrado de la distancia al punto, recta o plano.
Cuando el sistema sea discreto, el momento de inercia es la suma de todos los momentos de inercia puntuales y si el sistema es continuo, la suma se reemplaza por integral.
Los momentos de inercia respecto a los tres planos coordenados son

$$I_{YOZ} = \sum m_i x_i^2$$
$$I_{XOZ} = \sum m_i y_i^2$$
$$I_{XOY} = \sum m_i z_i^2$$

Los momentos de inercia respecto a los tres ejes coordenados son

$$\left.\begin{array}{l} I_{OX} = \sum m_i(y_i^2 + z_i^2) = I_{XOZ} + I_{XOY} \\ I_{0Y} = \sum m_i(x_i^2 + z_i^2) = I_{YOZ} + I_{XOY} \\ I_{0Z} = \sum m_i(x_i^2 + y_i^2) = I_{XOZ} + I_{YOZ} \end{array}\right\}$$

El momento de inercia respecto a un eje es la suma de los momentos de inercia respecto a dos planos perpendiculares entre si y que contengan a dicho eje.

El momento de inercia respecto a un punto es

$$I_0 = \sum m_i(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = I_{XOY} + I_{XOZ} + I_{YOZ} = \frac{1}{2}\left[\, I_{0X} + I_{0Y} + I_{0zZ}\right] =$$
$$= I_{OX} + I_{YOZ} = I_{OY} + I_{XOZ} = I_{OZ} + I_{XOY}$$

El momento de inercia respecto a un punto es la suma de los momentos de inercia respecto a tres planos perpendiculares entre sí y que se corten en ese punto, o bien es igual a la semisuma de los momentos de inercia respecto a tres ejes perpendiculares entre sí y que se corten en dicho punto. También puede expresarse como la suma del momento de inercia respecto a un eje y el momento de inercia respecto al plano perpendicular que se cortan en dicho punto.

Si se tiene una figura plana, el momento de inercia de la figura respecto al plano que la contiene es nulo. Por tanto, el momento de inercia respecto a un punto coincide con el momento de inercia respecto al plano perpendicular que pasa por ese punto. El momento de inercia respecto a cualquier eje contenido en la figura coincide con el momento de inercia respecto a un plano perpendicular a la misma y que contenga al eje.

Si se tiene un sistema constituido por varios subsistemas, el momento de inercia respecto a un punto, eje o plano, es la suma de los momentos de inercia de cada uno de los subsistemas respecto a dicho punto, eje o plano.

Teoremas de Steiner

El momento de inercia de un sistema material respecto a un punto, eje o plano, es igual al momento de inercia respecto a otro paralelo que pase por el centro de gravedad más el producto de toda la masa concentrada en el c.d.g. por el cuadrado de la distancia que separa a ambos puntos, ejes o planos.