UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

E.T.S. de Ingenieros Agrónomos

Estática

1. Equilibrio
2. Centros de gravedad y
3. Momentos de inercia

Parte de la física que estudia el equilibrio de los cuerpos

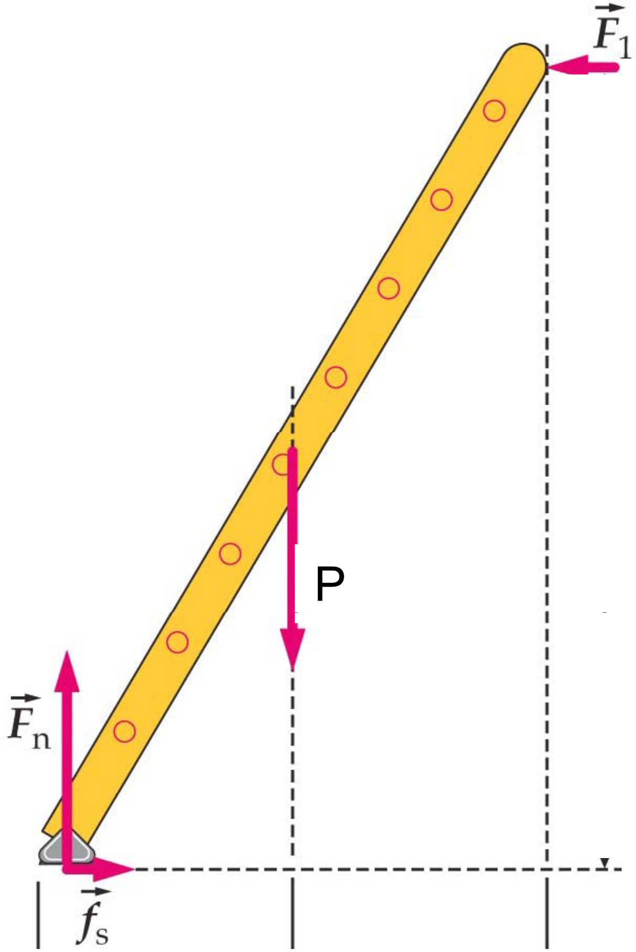
Parte de la física que estudia las relaciones existentes entre las fuerzas que actúan en un cuerpo para que se encuentre en equilibrio

Un punto está en equilibrio si la resultante de las fuerzas aplicadas es nula

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0}$$

Un sólido/sistema está en equilibrio si 1) la resultante de las fuerzas aplicadas es nula y 2) el momento resultante de las fuerzas aplicadas es nulo

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \qquad \Sigma\vec{M} = \vec{0}$$



$$\sum F_x = 0 \qquad f_s - F_1 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \qquad F_n - P = 0$$

$$\sum M_O = 0$$

En el equilibrio la resultante de las fuerzas aplicadas es nula

Si la resultante de las fuerzas aplicadas es conservativa, se puede expresar por

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

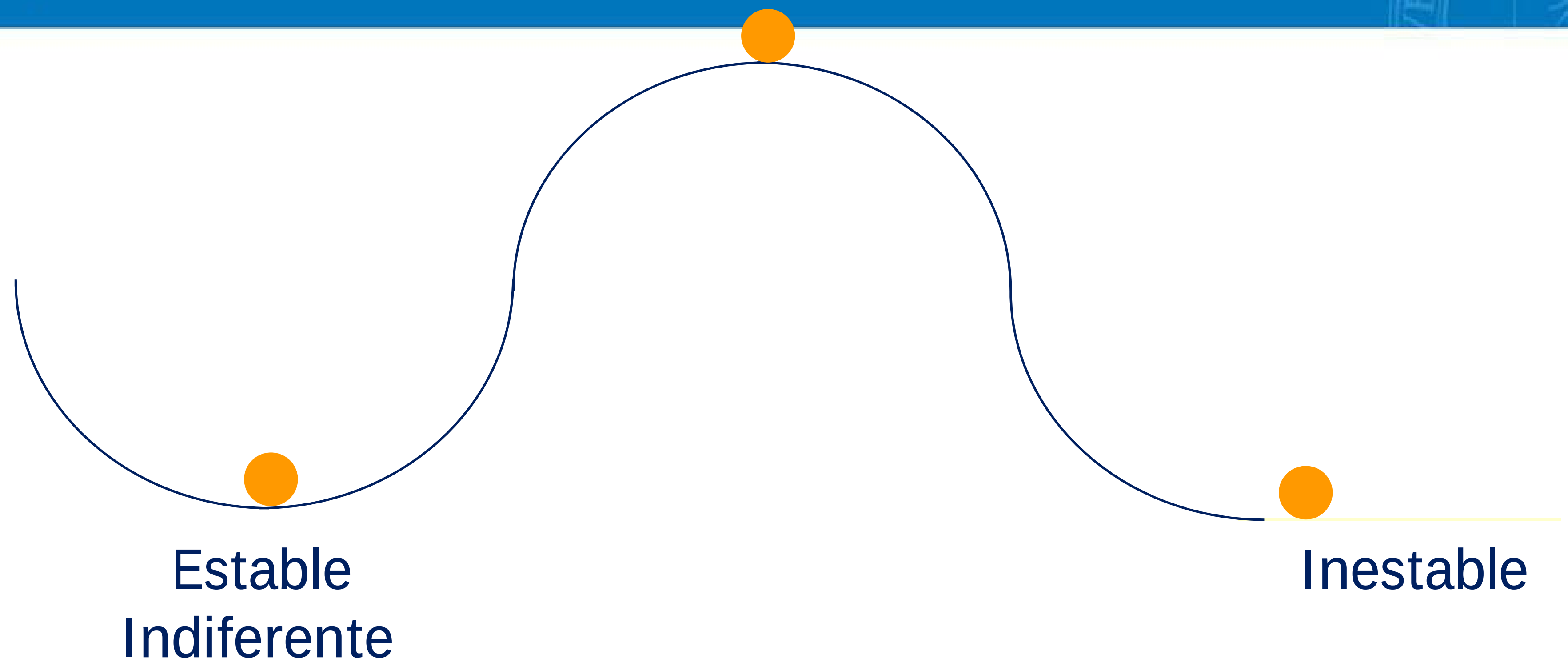
$$\sum \vec{F} = -\vec{\nabla} U$$

En las posiciones de equilibrio la energía potencial debe ser máxima o mínima

Si al separarse de la posición de equilibrio, el sistema retorna a dicha posición, el equilibrio es estable

Si al separarse de la posición de equilibrio, el sistema se aleja cada vez más de dicha posición el equilibrio es inestable

Si al separarse de la posición de equilibrio el sistema sigue estando en una posición de equilibrio análoga a la inicial el equilibrio es indiferente

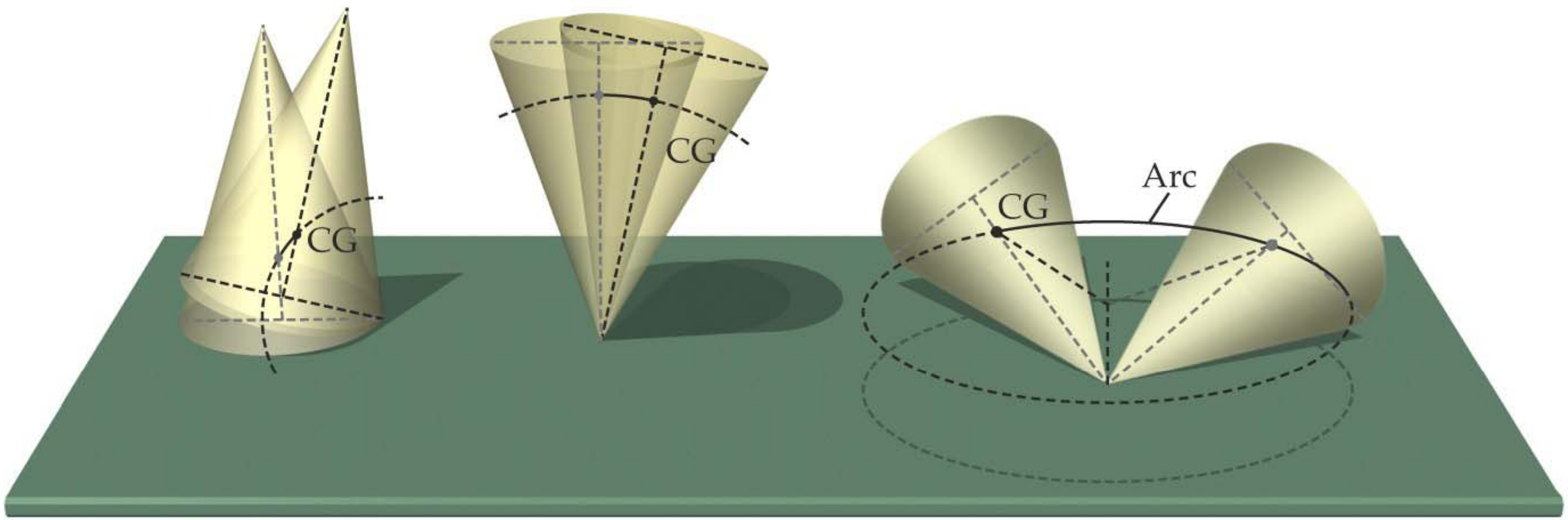


Equilibrio estable → Energía potencial mínima

Equilibrio inestable → Energía potencial máxima

Equilibrio indiferente → Energía potencial constante

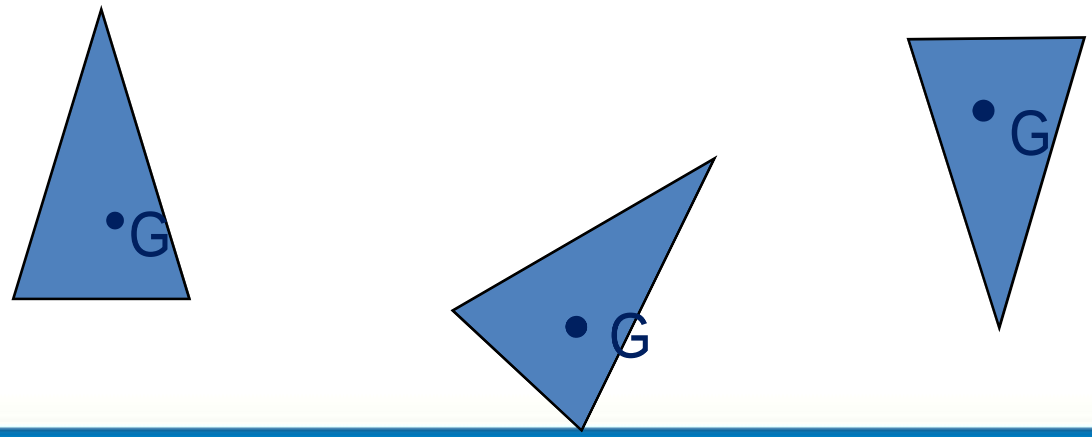
Estable | Inestable | Indiferente



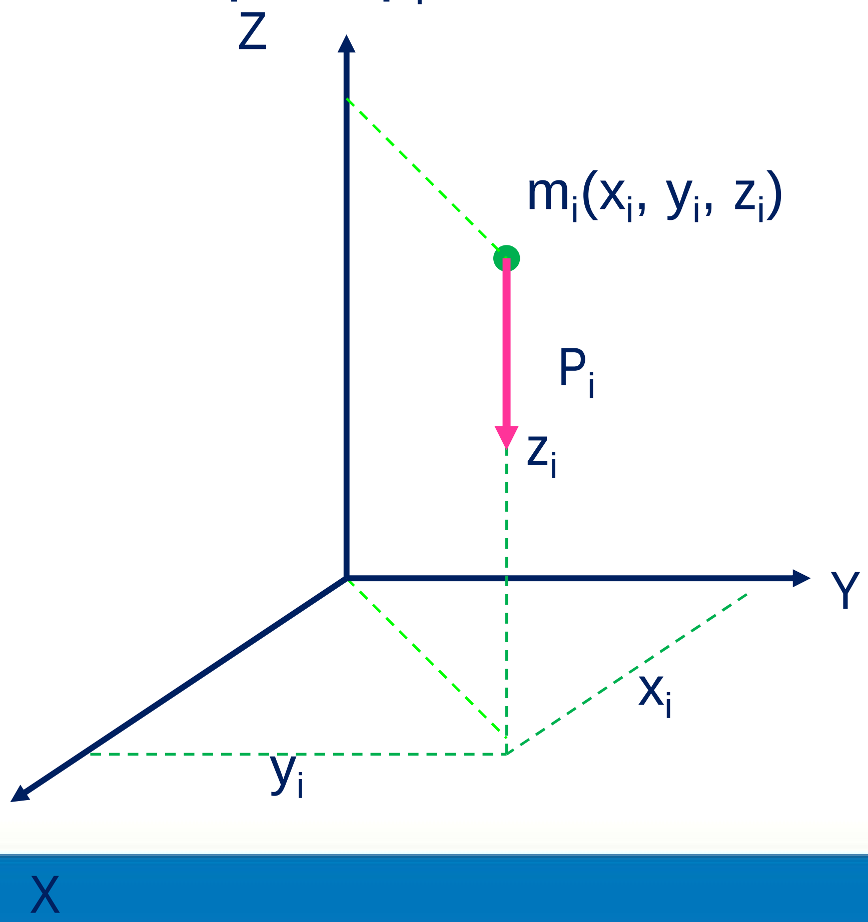
Centro de gravedad

El centro de gravedad de un sistema de puntos materiales (o un sólido) es el punto del espacio en el que se considera que está aplicado el peso.

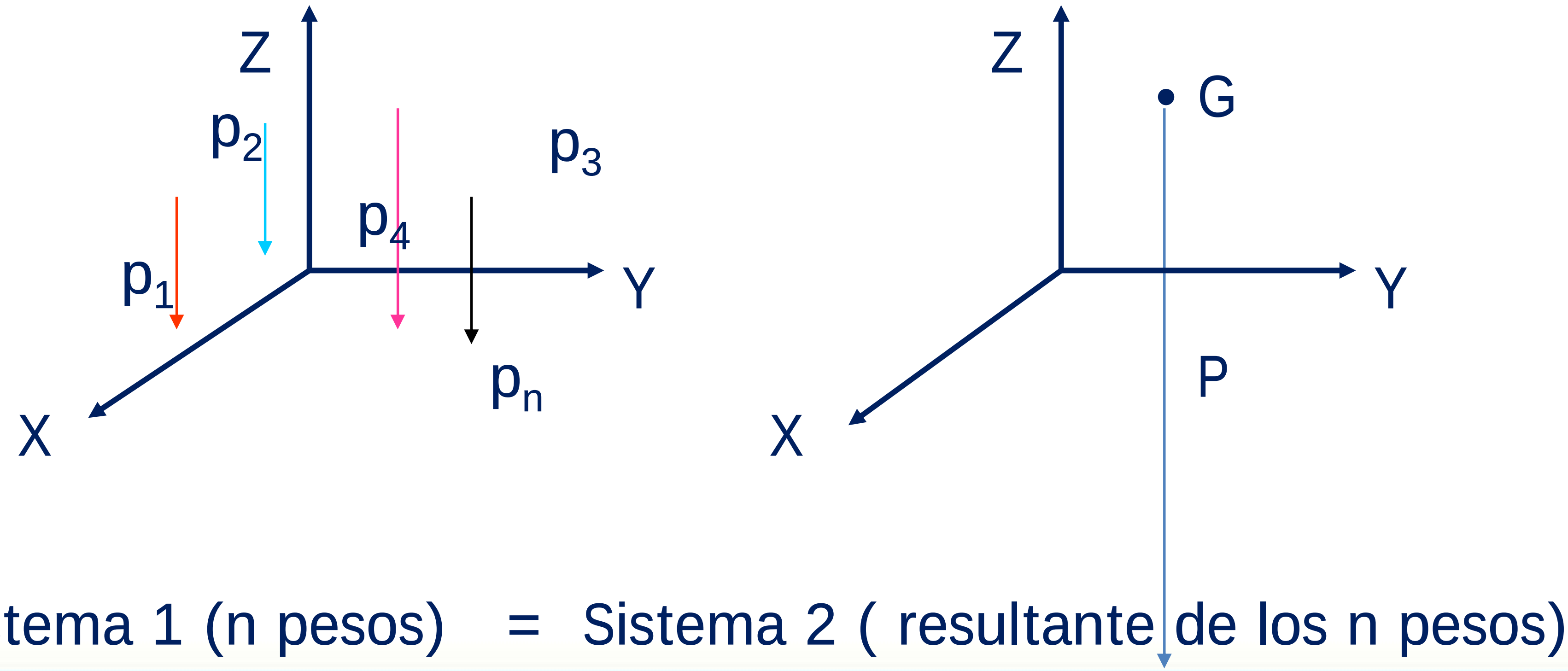
Es un punto único, independiente de la posición y orientación del sólido



Cada partícula i del sistema, está situada en un punto de coordenadas (x_i, y_i, z_i) respecto a un sistema de referencia cartesiano, y tiene un peso p_i.



El centro de gravedad de un sistema, es un punto del espacio en el que se puede considerar que está aplicada la resultante de los pesos de cada una de las partículas que constituyen el sistema.



Sistema 1 (n pesos) = Sistema 2 (resultante de los n pesos)

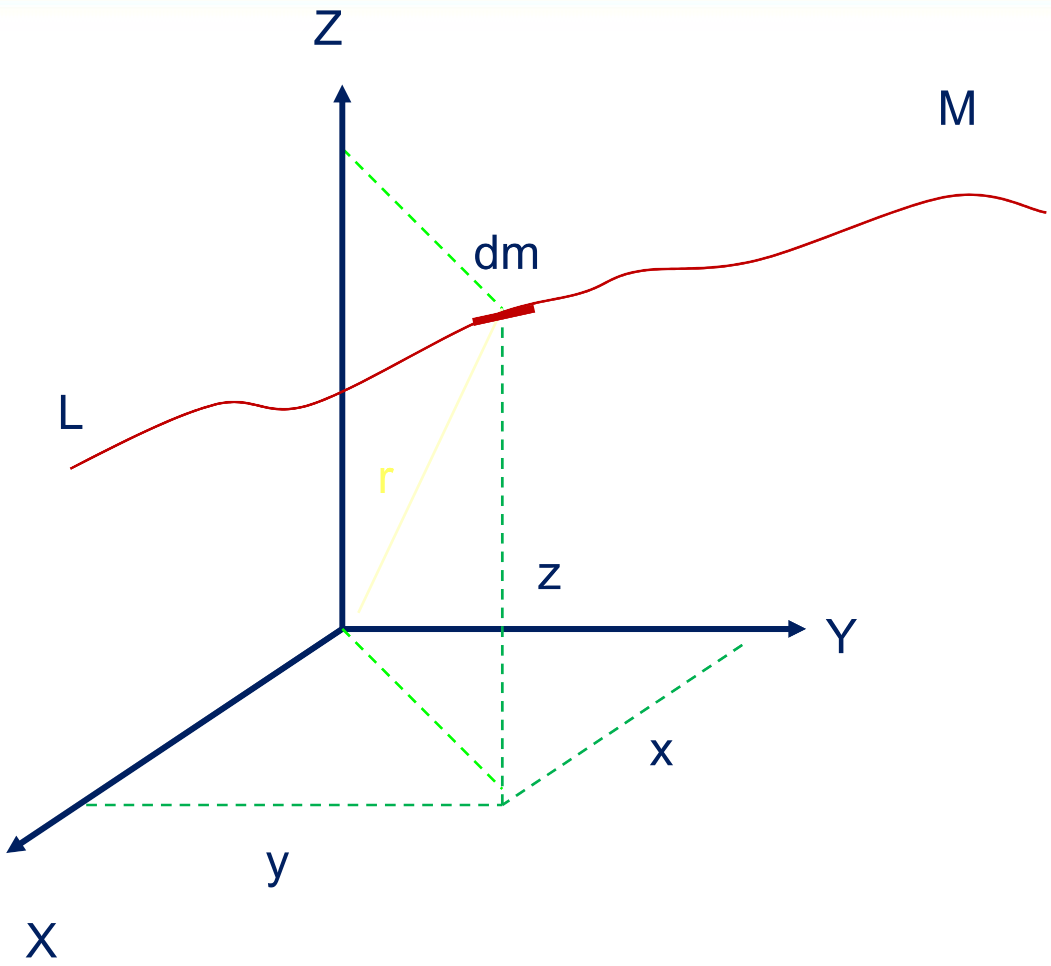
El sistema constituido pon n pesos, se puede sustituir por el peso resultante aplicado en el centro de gravedad, y la resultante y el momento resultante es el mismo

$$x_G = \frac{m_1 x_1 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$$y_G = \frac{m_1 y_1 + \ldots + m_n y_n}{m_1 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

El centro de gravedad G está situado en un punto de coordenadas (x_G, y_G, z_G) respecto a dicho sistema de referencia y en él se aplica la resultante de todos los pesos P

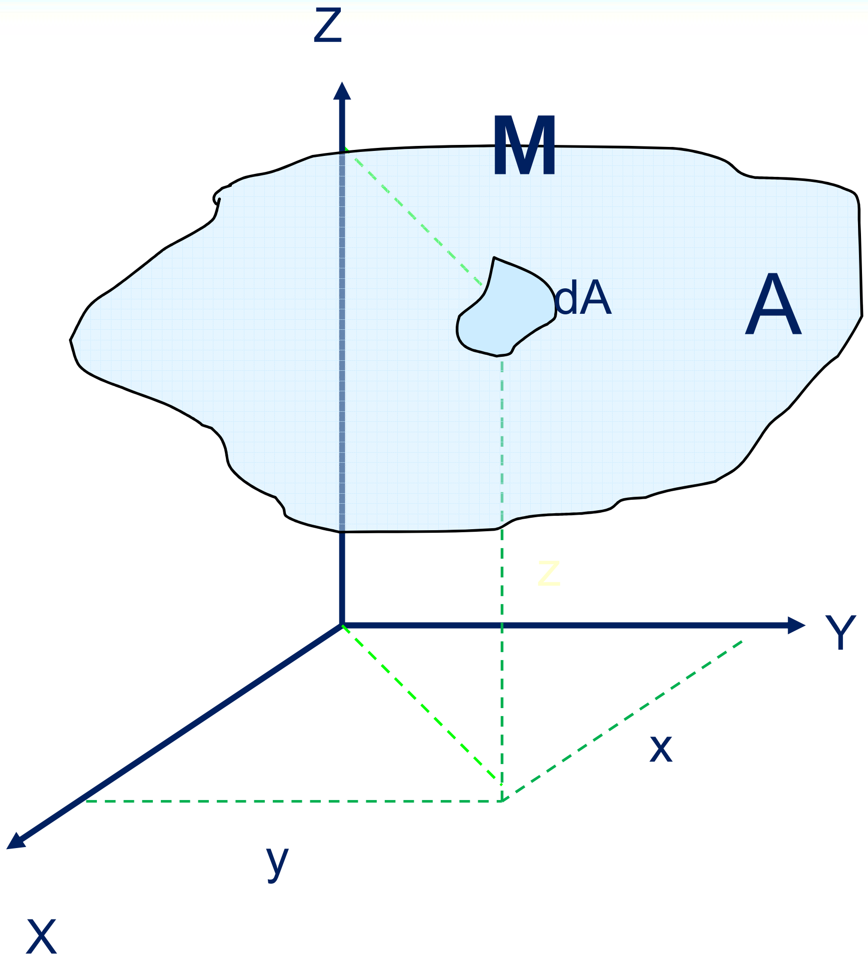
$$z_G = \frac{m_1 z_1 + \ldots + m_n z_n}{m_1 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$



$$x_G = \frac{1}{M}\int_L x\,dm$$

$$y_G = \frac{1}{M}\int_L y\,dm$$

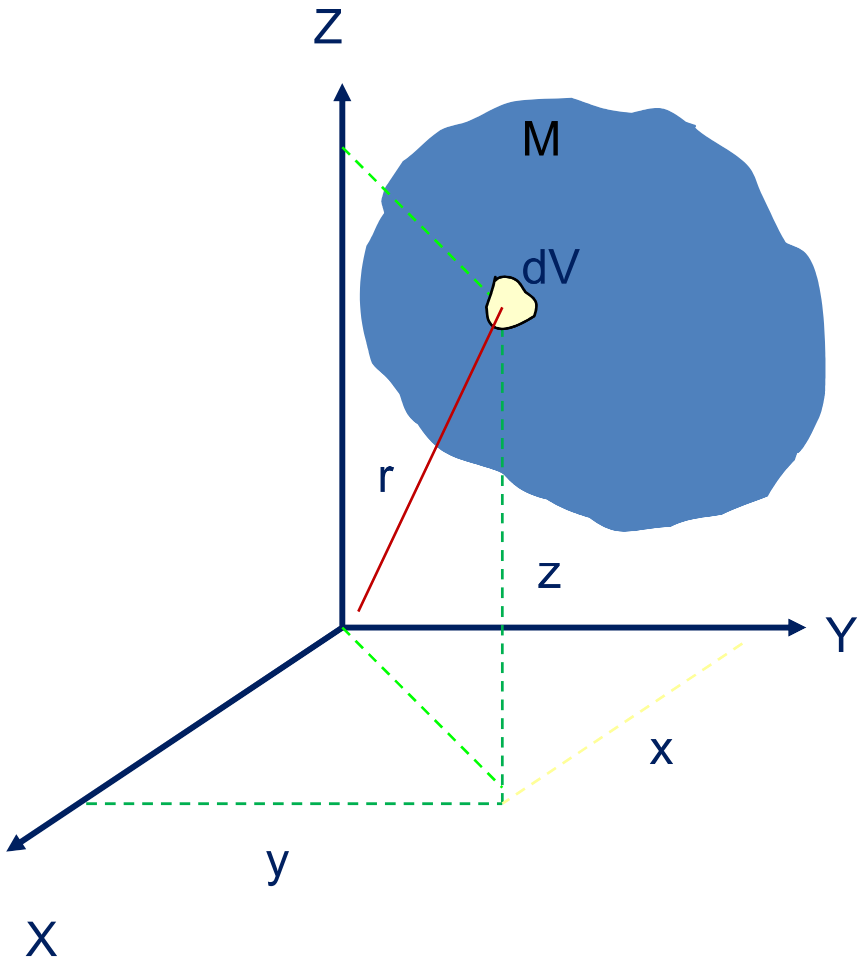
$$z_G = \frac{1}{M}\int_L z\,dm$$



$$x_G = \frac{1}{M} \iint_A x\,dm$$

$$y_G = \frac{1}{M} \int_L y\,dm$$

$$z_G = \frac{1}{M} \int_L z\,dm$$



$$x_G = \frac{1}{M} \iiint_v x\,dm$$

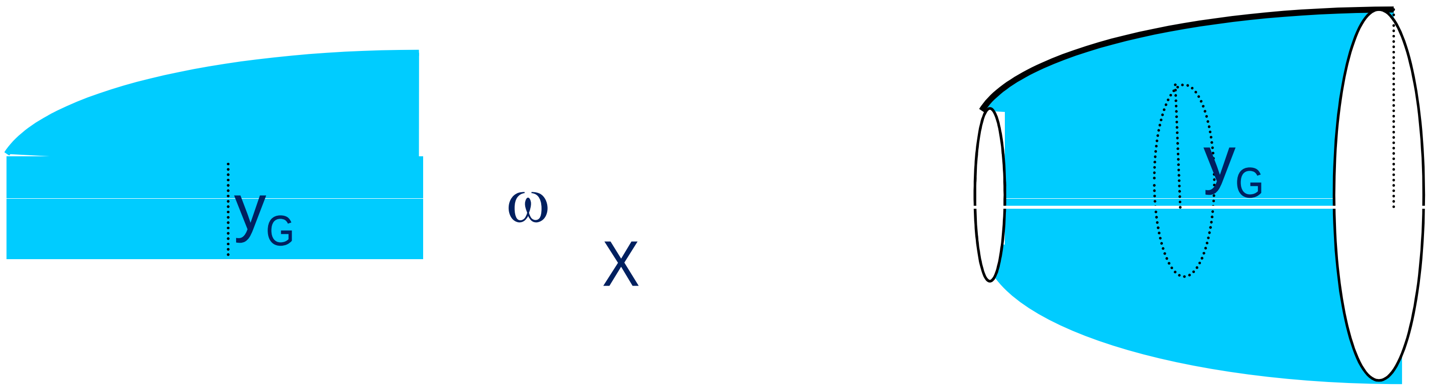
$$y_G = \frac{1}{M} \iiint_v y\,dm$$

$$z_G = \frac{1}{M} \iiint_v z\,dm$$

El área generada cuando una curva plana y homogénea gira en torno a un eje contenido en su plano, pero que no la corta es igual a la longitud L de la curva por la longitud de la circunferencia que describe el centro de gravedad al girar

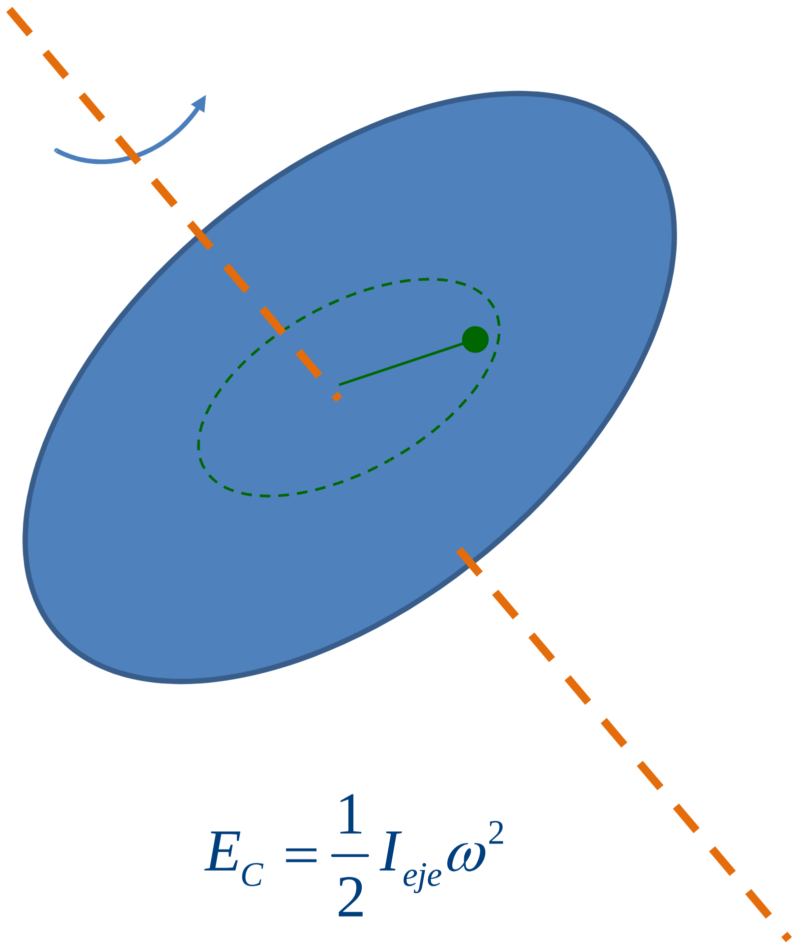
La curva AB, de longitud L, al gira en torno a X describe una circunferencia de radio y_G: $A = 2\pi y_G \cdot L$

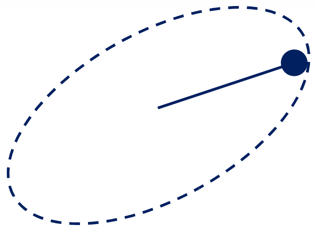
El volumen generado cuando una superficie plana y homogénea gira en torno a un eje contenido en su plano, pero que no la corta es igual al área de la superficie por la longitud de la circunferencia que describe el centro de gravedad al girar



La superficie, de área A, al gira en torno a X describe una circunferencia de radio y_G: $V = 2\pi y_G \cdot A$

Momento de inercia





$$v_i = \omega r_i$$

$$E_C = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \omega^2 r_i^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

$$I_{eje} = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

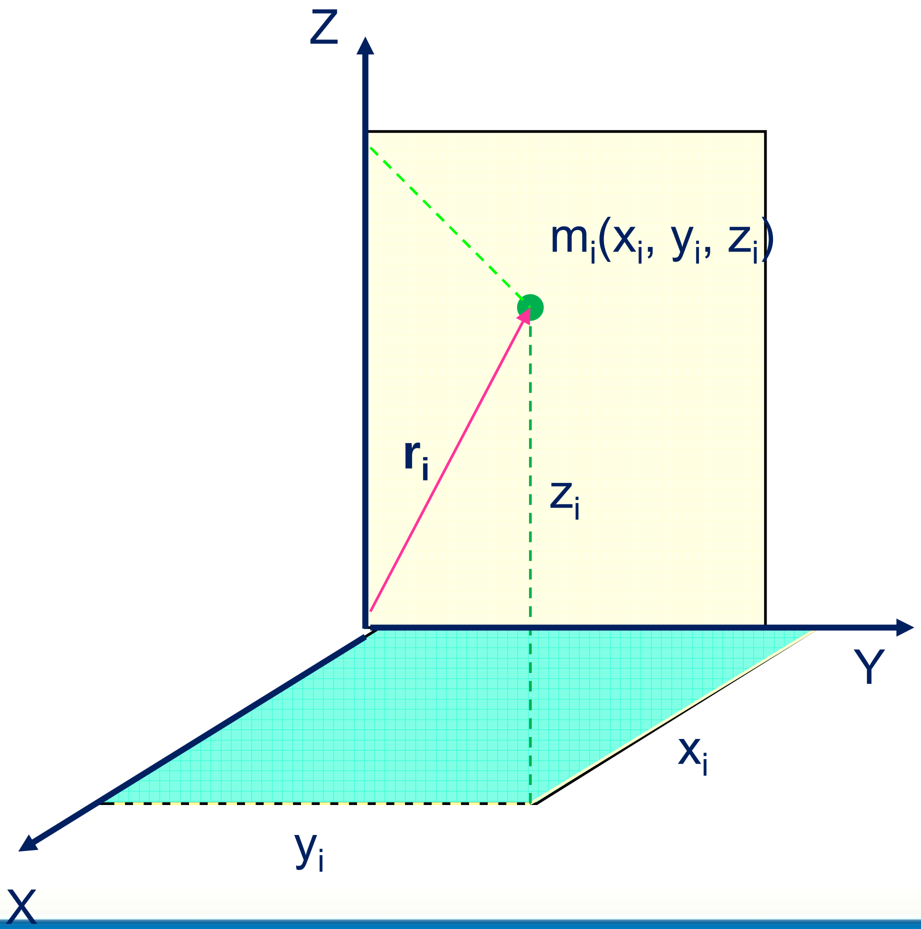
$$E_C = \frac{1}{2} I_{eje} \omega^2$$

$$I_O = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$$

$$I_{YOX} = \sum_{i=1}^{n} m_i z_i^2$$

$$I_{YOZ} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2$$

$$I_{XOZ} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2$$



El momento de inercia respecto a un punto es la suma de los momentos de inercia respecto a tres planos perpendiculares entre sí que se corten en dicho punto

$$I_O = I_{XOY} + I_{XOZ} + I_{YOZ}$$

El momento de inercia respecto a un punto es la semisuma de los momentos de inercia respecto a tres ejes perpendiculares entre sí que se corten en dicho punto

$$I_O = \frac{1}{2}(I_{OX} + I_{OY} + I_{OZ})$$

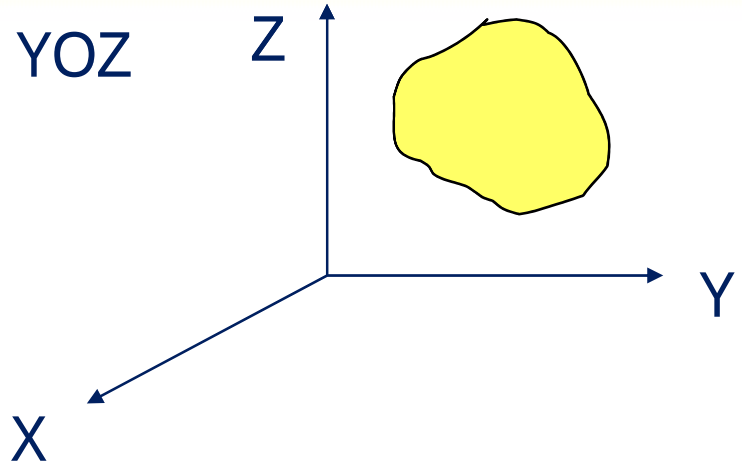
El momento de inercia respecto a un punto es la suma del momento de inercia respecto a un eje y el momento de inercia respecto a un plan perpendicular a él que se corten en dicho punto

$$I_O = I_{OZ} + I_{XOY} = I_{OY} + I_{XOZ} = I_{OX} + I_{YOZ}$$

El momento de inercia respecto a un eje es la suma de los momentos de inercia respecto a los dos planos perpendiculares entre sí que se corten en dicho eje

$$I_{OX} = I_{XOY} + I_{XOZ} \qquad I_{OY} = I_{XOY} + I_{YOZ} \qquad I_{OZ} = I_{XOZ} + I_{YOZ}$$

Si la figura está en el plano YOZ



$$\boxed{I_{YOZ} = 0}$$

$$I_{OX} = I_{XOY} + I_{XOZ}$$

$$I_{OY} = I_{XOY}$$

$$I_{OZ} = I_{XOZ}$$

$$I_O = \frac{1}{2}(I_{OX} + I_{OY} + I_{OZ}) = I_{OY} + I_{OZ}$$

$$I_O = I_{YOZ} + I_{OX} = I_{OX}$$

$$I_O = I_{XOY} + I_{OZ}$$

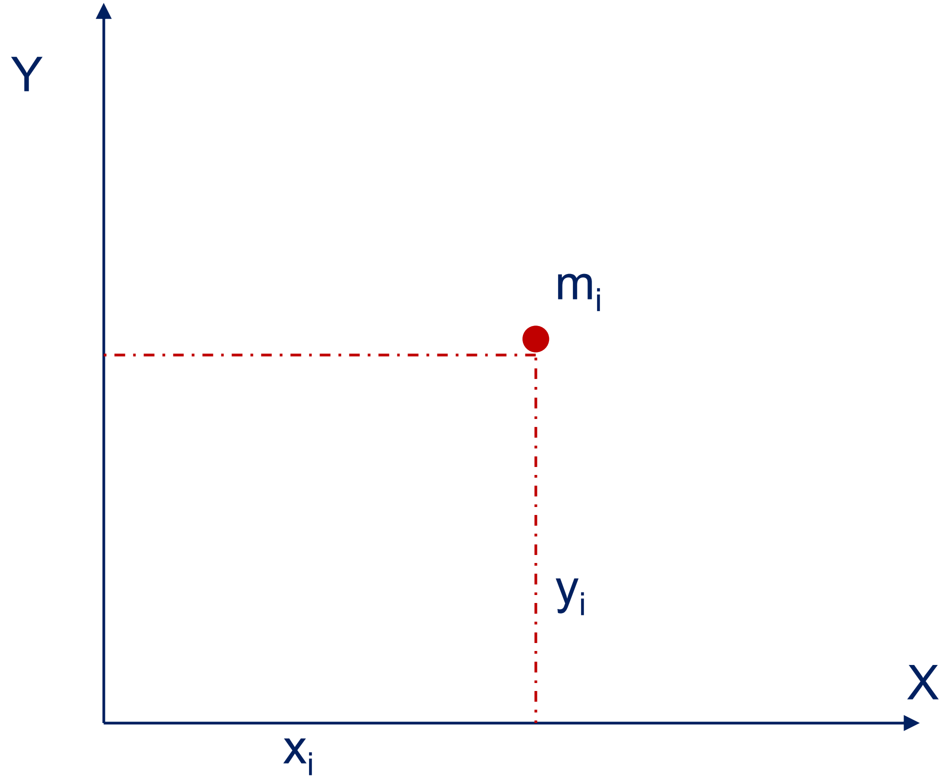
$$I_O = I_{XOZ} + I_{OY}$$

En una figura plana, el momento de inercia respecto a un punto es la suma de los momentos de inercia respecto a dos ejes perpendiculares entre sí, contenidos en el plano, que se cortan en dicho punto

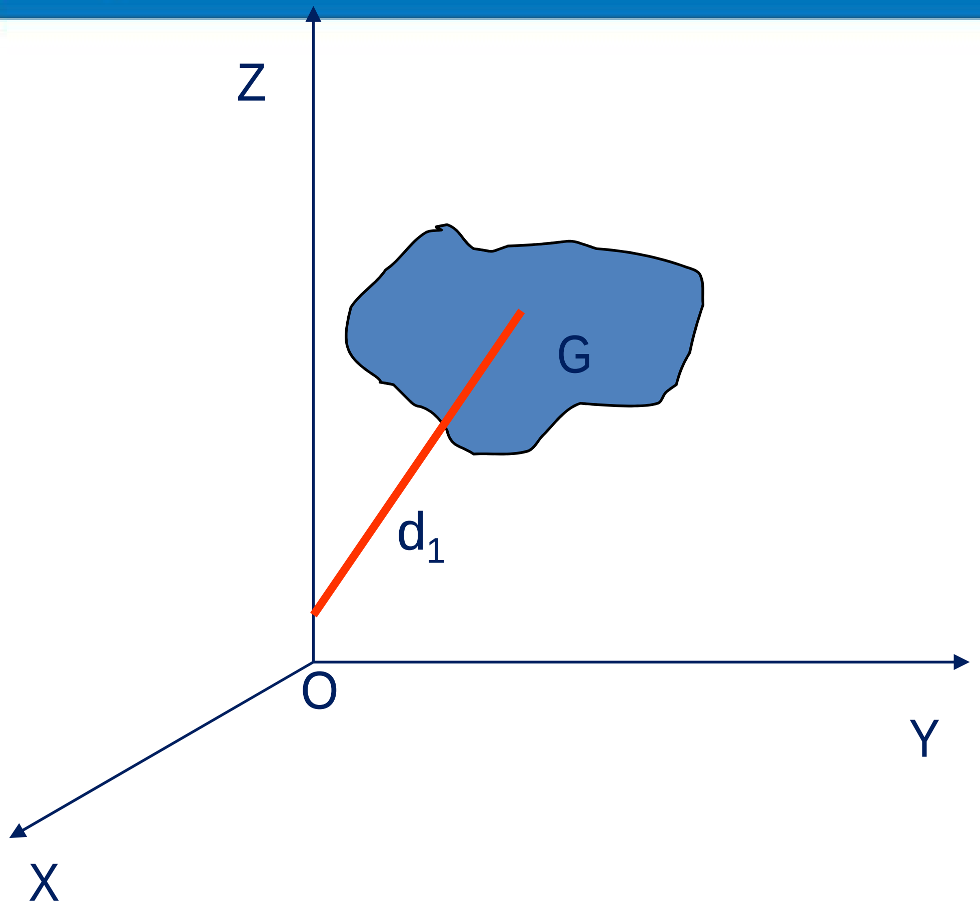
En una figura plana, el momento de inercia respecto a un punto es igual al momento de inercia respecto a un eje perpendicular a la figura, que pase por dicho punto

En una figura plana, el momento de inercia respecto a un eje contenido en el plano, es igual al momento de inercia respecto a un plano perpendicular a él que le corte en dicho eje

Respecto a las rectas OX, OY

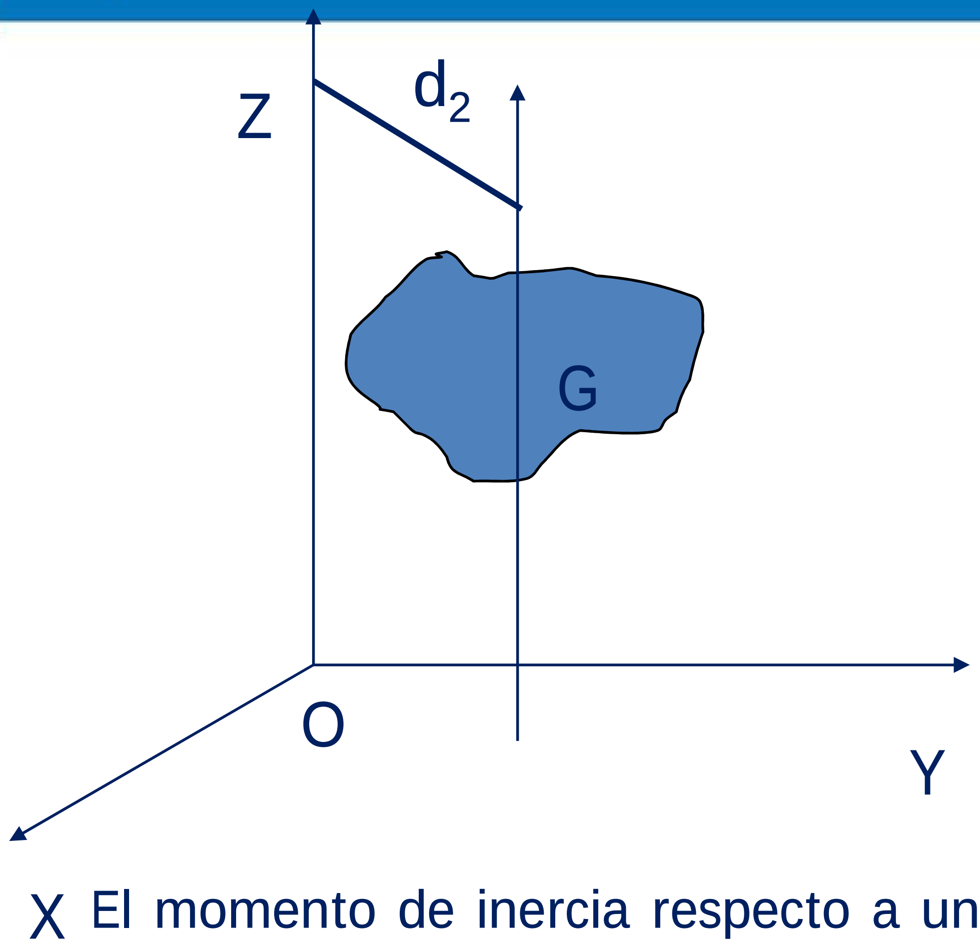


$$P_{XY} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i$$



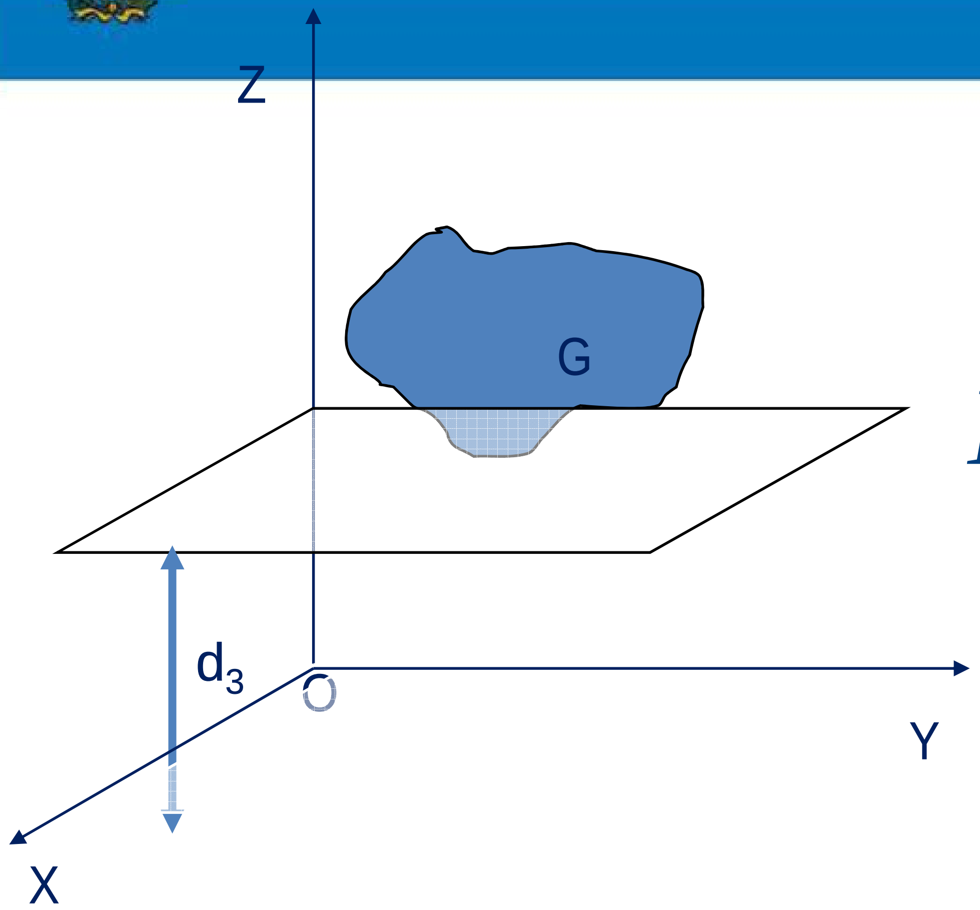
$$I_O = I_G + Md_1^2$$

El momento de inercia respecto a un punto O es la suma del momento de inercia respecto al centro de gravedad G y de la masa total del sistema por el cuadrado de la distancia que separa los puntos G y O



$$I_{OZ} = I_{GZ} + Md_2^2$$

El momento de inercia respecto a un eje cualquiera (OZ) es la suma del momento de inercia respecto a un eje paralelo que pase por el centro de gravedad G (Eje CZ) y la masa total del sistema por el cuadrado de la distancia que separa los dos ejes



$$I_{XOY} = I_{XGY} + Md_3^2$$

El momento de inercia respecto a un plano cualquiera (XOY) es la suma del momento de inercia respecto a un plano paralelo que pase por el centro de gravedad G (Plano XGY) y la masa total del sistema por el cuadrado de la distancia que separa los dos planos

El momento de inercia respecto a un punto, eje o plano es igual al momento de inercia respecto a un punto, eje o plano paralelo al anterior y que pase por el centro de gravedad, mas la masa total del sistema por el cuadrado de la distancia que separa ambos puntos, ejes o planos