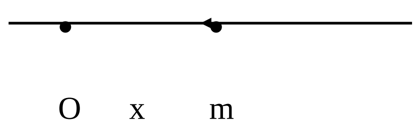
MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Estudio del movimiento armónico simple. Desde el punto de vista dinámico, es el movimiento de una partícula que se mueve sobre una recta, sometida a la acción de una fuerza atractiva hacia un punto fijo O y que es proporcional a la distancia *x* a dicho punto. El punto O se denomina centro de fuerzas y es una posición de equilibrio estable para la partícula. Por tanto la fuerza que actúa sobre la partícula es $F = -kx$, y el signo negativo indica que se trata de una fuerza atractiva hacia la posición de equilibrio y contraria al sentido del movimiento

$$\vec{F} = -kx\vec{i}$$



La ecuación del movimiento es

$$F = -kx = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

donde k es la constante recuperadora elástica de la fuerza.

La ecuación diferencial del movimiento puede expresarse $mx'' + kx = 0$. La solución de la ecuación diferencial es una función sinusoidal del tiempo de la forma

$$x = A\cos(\omega t + \beta)$$

siendo A y β constantes que se determinan imponiendo condiciones iniciales al sistema.

El desplazamiento máximo respecto a la posición de equilibrio se llama **amplitud** A.

La distancia, en un instante dado, hasta la posición de equilibrio se llama **elongación** x.

Se denomina **fase** al argumento de la función coseno $\omega t + \beta$ y se denomina **fase inicial** a β

El tiempo empleado por la partícula en realizar una oscilación completa se llama **período** T y a su inversa se llama **frecuencia** f que es el número de oscilaciones realizadas por segundo.

Se llama **frecuencia propia** o pulsación ω al ángulo girado en 1 segundo, $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ viene expresada en radianes/seg.

Para demostrar que el valor de x es una solución de la ecuación del movimiento, se deriva x dos veces, y se sustituye en la ecuación diferencial.

$$x' = v = -A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t + \beta)$$

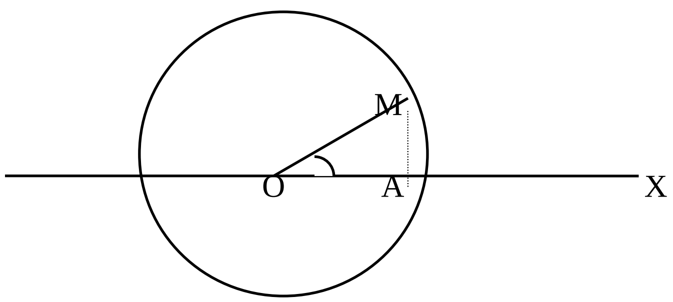
$$a = \frac{dv}{dt} = x'' = -\omega^2 A\cos(\omega t + \beta) = -\omega^2 x$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación diferencial, obtenemos $\omega^2 = \frac{k}{m}$. Por tanto, el período $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ es independiente de la amplitud A del movimiento.

La velocidad máxima de la partícula se obtiene cuando ésta pasa por la posición de equilibrio $x = 0$, haciéndose nula cuando x se hace máximo o mínimo: $x = \pm A$

El movimiento armónico puede no ser rectilíneo, por ejemplo, los pequeños movimientos de un péndulo simple, en el cual el movimiento es armónico simple angular.

Desde el punto de vista cinemático, el movimiento armónico simple es la proyección sobre una recta del movimiento de una partícula que describe un movimiento circular uniforme.



Si el vector de posición en un instante genérico t es

$$\vec{OM} = \vec{r}(t) = R\cos\varphi\vec{i} + R\,\mathrm{sen}\,\varphi\vec{j} = R\cos\omega t\vec{i} + R\,\mathrm{sen}\,\omega t\vec{j}$$

siendo el radio R=*OM*=*A*, $\varphi = \omega t$ el ángulo en el instante t y ω la velocidad angular del movimiento circular que origina el m.a.s., la proyección del movimiento sobre el eje OX es la abscisa x

$$OP = x = A\cos\omega t$$

Energía del movimiento armónico simple. Cuando un cuerpo oscila sujeto a un muelle, en ausencia de rozamiento, tanto la energía cinética del cuerpo como la energía potencial del sistema cuerpo-muelle varían con el tiempo, mientras la energía total es constante.

La energía cinética de un cuerpo de masa *m* que se mueve con velocidad *v* es:

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2$$

Si realiza un movimiento armónico simple la energía cinética es:

$$E_C = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\,\mathrm{sen}^2(\omega t + \beta) = \frac{1}{2}kA^2\,\mathrm{sen}^2(\omega t + \beta)$$

Por tratarse de una fuerza conservativa, la energía potencial se deduce de la expresión

$$F = -kx = -\frac{dU}{dx} \Rightarrow dU = kxdx$$

Integrando se obtiene

$$U = \frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \beta)$$

La energía mecánica, suma de la energía cinética y potencial es

$$U + E_C = \frac{1}{2}kA^2$$

que es proporcional al cuadrado de la amplitud.

Para la posición de máximo desplazamiento $x = \pm A$ la energía potencial es máxima y la energía cinética nula; cuando el cuerpo se mueve acercándose a la posición de equilibrio aumenta su energía cinética y disminuye su energía potencial hasta hacerse nula en la posición de equilibrio.

Péndulo simple. Es un sistema material constituido por una masa puntual sujeta mediante un hilo rígido de longitud l y de peso despreciable a un punto fijo O, que se separa ligeramente de la posición de equilibrio estable. Al dejar libre el sistema, éste realiza un movimiento armónico simple. Las fuerzas que actúan sobre la masa son su peso, mg, y la tensión T del hilo. Cuando el hilo forma un ángulo φ con la vertical, el peso tiene dos componentes: $mg\cos\varphi$ en la dirección del hilo y $mg\,\mathrm{sen}\,\varphi$ en la dirección perpendicular y en sentido de φ decreciente

Sea s la longitud de arco medida desde la posición de equilibrio cuando la masa se ha desplazado un ángulo φ; la longitud el hilo es l, por lo que se cumple: $s = l \cdot \varphi$.

La aceleración tangencial es $\frac{d^2s}{dt^2}$ y la componente tangencial de la fuerza, según la segunda ley de Newton:

$$F_T = -mg\,\mathrm{sen}\,\varphi = m\frac{d^2s}{dt^2} = ml\frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

Por tanto, la ecuación diferencial del movimiento es $l\frac{d^2\varphi}{dt^2} + g\,\mathrm{sen}\,\varphi = 0$

Cuando el ángulo es muy pequeño, del orden de $\varphi \le \frac{\pi}{12}$, el seno del ángulo se puede aproximar al ángulo, de donde

$$l\varphi'' + g\varphi = 0 \Rightarrow \varphi'' = -\frac{g}{l}\varphi$$

En el caso de pequeños desplazamientos angulares, la aceleración angular φ'' es proporcional y de signo opuesto al desplazamiento angular φ. El movimiento del péndulo es armónico simple por realizar pequeños desplazamientos. La solución de la ecuación diferencial es

$$\varphi = A\cos(\omega t + \beta)$$

siendo A=φ_{max} el desplazamiento angular máximo, ω es la pulsación del m.a.s, $\omega^2 = \frac{g}{l}$ y el periodo es T= $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.