Longitud, áreas y volúmenes

Circunferencia de radio R $L = 2\pi R$

Círculo de radio R $A = \pi R^2$

Triángulo de base B y altura H $A = \frac{1}{2}(BH)$

Cuadrado de lado L $A = L^2$

Rectángulo de base B y altura H $A = BH$

Superficie esférica $A = 4\pi R^2$

Prisma recto de lados a,b,c $V = abc$

Cilindro de radio R y altura H $V = \pi R^2 H$

Cono de radio R y altura H $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$

Esfera $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

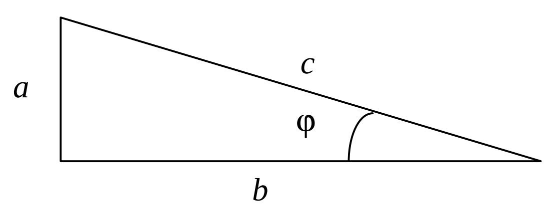
Trigonometría

Un triángulo rectángulo es aquel que tiene un ángulo de 90º. Considerando un triángulo rectángulo de catetos a y b, el lado c es la hipotenusa. El lado a del triángulo es le cateto opuesto al ángulo φ y el lado b, es el cateto contiguo a dicho ángulo. Las tres funciones trigonométricas que se definen para el ángulo φ son el seno (senφ), el coseno (cosφ) y la tangente (tgφ), de la siguiente manera

$$sen\varphi = \frac{cateto\ \ opuesto\ a\ \varphi}{hipotenusa} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\varphi = \frac{cateto\ \ contiguo\ a\ \varphi}{hipotenusa} = \frac{b}{c}$$

$$tg\varphi = \frac{cateto\ \ opuesto\ a\ \varphi}{cateto\ \ contiguo\ \ a\ \ \varphi} = \frac{a}{b}$$



Por aplicación del teorema de Pitágoras se verifica $a^2 + b^2 = c^2$, de donde se verifica la relación entre las funciones anteriores $sen^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$

Las funciones inversas de las anteriores son

$\csc = \dfrac{1}{sen\varphi}$, denominada cosecante

$\sec = \dfrac{1}{\cos\varphi}$, denominada secante

$ctg\varphi = \dfrac{1}{tg\varphi}$ denominada cotangente

Valores del seno y coseno de los principales ángulos del primer cuadrante

	0	**30**	**45**	**60**	**90**
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$ $\qquad c\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$

$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ $\qquad c\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}$

$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$

$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$

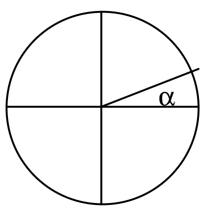
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

$\operatorname{sen}2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$

$\operatorname{tg}2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$



$\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha$ $\qquad \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\operatorname{sen}\alpha$ $\qquad \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) = \operatorname{sen}\alpha$

$\operatorname{sen}(\pi-\alpha) = \operatorname{sen}\alpha$ $\qquad \operatorname{sen}(\pi+\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$

$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$ $\qquad \cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$

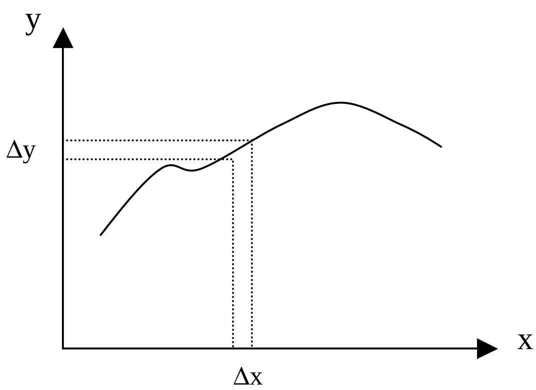
Cálculo diferencial

En varias ramas de la Ciencia es necesario el uso de algunas de las herramientas del cálculo, inventado por Newton, para describir los fenómenos físicos; tal es el caso del cálculo integral y el cálculo diferencial.

En primer lugar es necesario especificar una función que describa cómo se relaciona una variable con otra, es decir la función y(x);. la variable x se denomina independiente y la variable y, variable dependiente. Decimos que y es función de x, que se expresa y(x), cuando la primera variable adquiere valores que dependen de los valores de la segunda.

En muchas demostraciones físicas, aparece el concepto de derivada de una función. Si queremos saber cómo varía una función y(x) en un determinado intervalo de la variable x haremos $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Hemos considerado una pequeña variación de y, que se produce cuando consideramos una pequeña variación de la variable x.

Representado gráficamente los valores que adquiere y para los distintos valores de x, tenemos



Pero si Δx es extremadamente pequeño, estaremos analizando dicha variación en el límite en que el incremento de x, Δx , se hace casi cero; en este caso escribiremos $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Ese valor límite es lo que se conoce como derivada de y respecto a x; gráficamente se observa que en un entorno muy pequeño de un punto de coordenadas P(x,y), si se considera una pequeña variación de x, Δx, se produce una pequeña variación de la variable y Δy. Por tanto la derivada de y respecto a x representa la tangente a la curva en el punto P de coordenadas (x,y).

En física, como trataremos con funciones continuas, escribiremos la derivada de la función y respecto a x como $\frac{dy}{dx}$.

Desarrollando la expresión anterior tenemos $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}$

Por ejemplo, en el estudio del movimiento de un punto encontramos que la posición, la velocidad y la aceleración son función del tiempo, pues estas funciones (r, v, a) toman distintos valores a medida que va transcurriendo el tiempo t. Así, la velocidad es la derivada de la posición respecto al tiempo pues es una medida de cómo varía la posición al variar el tiempo $v = \frac{ds}{dt}$, o la aceleración es la derivada de la velocidad respecto al tiempo $a = \frac{dv}{dt}$.

Propiedades de las derivadas

1. Derivada de la suma de dos funciones. Si una función $f(x)$ es la suma de dos funciones $g(x) + h(x)$, entonces la derivada de $f(x)$ es la suma de las derivadas

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d[g(x) + h(x)]}{dx} = \frac{dg(x)}{dx} + \frac{dh(x)}{dx}$$

2. Derivada del producto de dos funciones. Si una función $f(x)$ es el producto de dos funciones $g(x) \cdot h(x)$, entonces la derivada de $f(x)$ es

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d[g(x) \cdot h(x)]}{dx} = \frac{dg(x)}{dx} \cdot h(x) + g(x) \cdot \frac{dh(x)}{dx}$$

3. Derivada del cociente de dos funciones. Si una función $f(x)$ es el cociente de dos funciones $\frac{g(x)}{h(x)}$, entonces la derivada de $f(x)$ es

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d\left[\frac{g(x)}{h(x)}\right]}{dx} = \frac{\frac{dg(x)}{dx} \cdot h(x) - g(x) \cdot \frac{dh(x)}{dx}}{[h(x)]^2}$$

4. Derivada segunda. La segunda derivada de y con respecto a x se define como la derivada de la función $\frac{dy}{dx}$ (derivada de la derivada), que se expresa

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

5. Regla de la cadena del cálculo diferencial. Si la función y depende de la variable z, y=f(z), y a su vez z depende de x de la forma z=g(x), y depende implícitamente de x, por lo que la derivada de la función y respecto a x es

$$\frac{dy(z)}{dx} = \frac{dy(z)}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

Derivadas

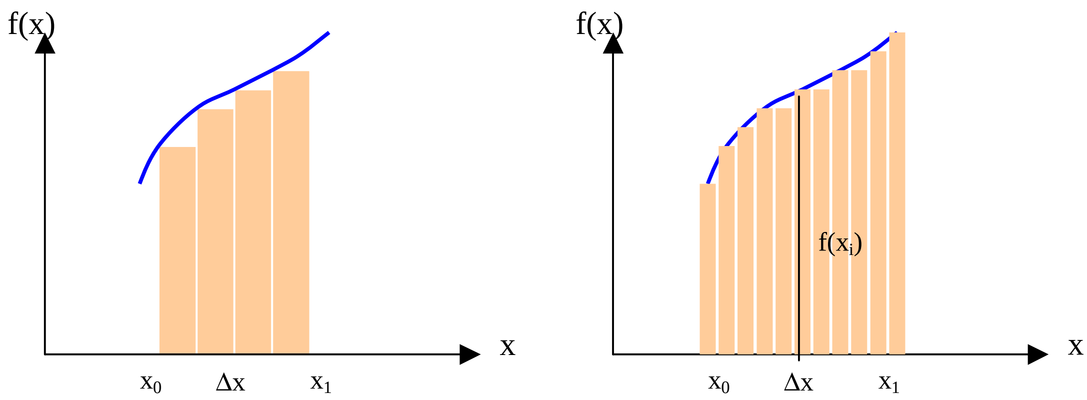
Función	Derivada
$y(x) = ax^m$	$\frac{dy(x)}{dx} = y'(x) = amx^{m-1}$
$y(x) = [f(x)]^m$	$\frac{dy(x)}{dx} = y'(x) = m[f(x)]^{m-1}\ f'(x)$
$y(x) = f(x)g(x)h(x)$	$\frac{dy(x)}{dx} = y'(x) = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$
$y(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{dy(x)}{dx} = y'(x) = \frac{f'(x)g(x) - (f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$
$y(x) = \sqrt[n]{x^m}$	$\frac{dy(x)}{dx} = y'(x) = \frac{m}{n}[f(x)]^{\frac{m-n}{n}}\ f'(x)$
$y(x) = \ln f(x)$	$\frac{dy(x)}{dx} = y'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$
$y(x) = \log f(x)$	$\frac{dy(x)}{dx} = y'(x) = \frac{1}{\ln 10}\frac{f'(x)}{f(x)}$
$y(x) = \operatorname{sen} x$	$\frac{dy(x)}{dx} = y'(x) = \cos x$
$y(x) = \operatorname{sen} f(x)$	$\frac{dy(x)}{dx} = y'(x) = f'(x)\cos f(x)$
$y(x) = \cos x$	$\frac{dy(x)}{dx} = y'(x) = -\operatorname{sen} x$
$y(x) = \cos f(x)$	$\frac{dy(x)}{dx} = y'(x) = -f'(x)\operatorname{sen} f(x)$
$y(x) = \operatorname{tg} x$	$\frac{dy(x)}{dx} = y'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
$y(x) = \operatorname{tg} f(x)$	$\frac{dy(x)}{dx} = y'(x) = \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} = f'(x)[1 + \operatorname{tg}^2 f(x)]$
$y(x) = e^x$	$\frac{dy(x)}{dx} = y'(x) = e^x$
$y(x) = e^{f(x)}$	$\frac{dy(x)}{dx} = y'(x) = f'(x)e^{f(x)}$

Cálculo integral

La integración es la operación inversa a la derivación; así, la integral de f(x) es otra función y(x), tal que $\frac{dy(x)}{dx} = f(x)$, es decir $\int f(x)dx = y(x) + C$, donde C es una constante.

Las funciones en física suelen ser contínuas, y sus integrales deben resolverse entre dos límites definidos, por ejemplo entre x_0 y x_1; en este caso se denomina integral definida entre dos límites.

Supongamos que debemos calcular el área encerrada bajo la curva que se encuentra entre los límites x_0 y x_1. Para ello se recurre a dividir el área en rectángulos, y la suma de sus correspondientes áreas nos daría una primera aproximación del área solicitada. Sin embargo, si hacemos que las bases de esos rectángulos sea lo más pequeña posible ($\Delta x \rightarrow 0$), tendremos una mayor cantidad de rectángulos más ajustados a la curva.



Si Δx tiende a cero, la suma de todas las áreas de los rectángulos será el área exacta encerrada bajo la curva. Así $Area = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} f(x_i) \cdot \Delta x_i = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$

Integrales

$$\int x\ dx = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$$

$$\int \frac{dx}{x^n} = \int x^{-n} dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \operatorname{sen} x \; dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \operatorname{tg} x \; dx = -\ln \;\; x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} dx = arc \operatorname{sen} x + C$$

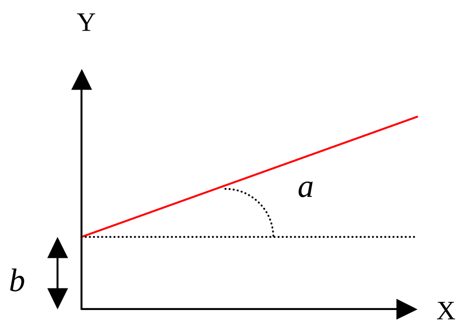
$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x \; dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{4} \int (2 - 2\cos 2x) dx = \frac{1}{4}(2x - \operatorname{sen} 2x) + C$$

$$\int \cos^2 x \; dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{4} \int (2 + 2\cos 2x) dx = \frac{1}{4}(2x + \operatorname{sen} 2x) + C$$

Geometría

Ecuación de una recta $y = ax + b$, siendo a la pendiente de la recta (también es igual a la tangente del ángulo que forma la línea con el eje X) y b la ordenada en el origen



La ecuación de la recta puede expresarse también conociendo un punto de la misma, de coordenada (x_0,y_0), y su vector director $\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j}$:

$\frac{x - x_0}{u_x} = \frac{y - y_0}{u_y}$ que es la ecuación en forma continua

Ecuación de una parábola $y = ax^2 + bx + c$. Los puntos en los que la parábola cortan al eje Y se obtienen haciendo que x sea nulo, lo cual se produce para y=c. Los puntos de la parábola que cortan al eje X se obtienen haciendo que *y* sea nulo, es decir se verifica $ax^2 + bx + c = 0$, y por tanto $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Ecuación de una circunferencia de radio R y centro (a,b) $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$**.**

Si el centro de la circunferencia es el origen de coordenadas (0,0), la ecuación es $x^2 + y^2 = R$

Ecuación de una superficie esférica de radio R y centro (a,b,c)

$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$

Si el centro de la superficie esférica es el origen de coordenadas (0,0,0) la ecuación es

$x^2 + y^2 + z^2 = R$

Distancia d **entre dos puntos** de coordenadas (x_1,y_1,z_1) y (x_2,y_2, z_2)

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

Notación científica

Muchas de las magnitudes con las que tratan los científicos son, a menudo, valores muy grandes o muy pequeños; por ejemplo la velocidad de la luz, en unidades del sistema internacional es 300000000 m/s, lo que es *incómodo* de leer y de escribir. Para evitar este problema se emplea un método basado en la utilización de las potencias de 10.

10^0=1

10^1=10

10^2=100

10^3=1000

10^4=10000

10^5=100000

El número de ceros se corresponde con la potencia a la que se eleva 10, denominado exponente. Así la velocidad de la luz puede expresarse $3 \cdot 10^8$ m/s

Con este método, los números menores que la unidad se representan como sigue

$$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

$$10^{-2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

$$10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$$

$$10^{-4} = \frac{1}{10000} = 0{,}0001$$

$$10^{-5} = \frac{1}{100000} = 0{,}00001$$

En este caso, el número de posiciones que la coma decimal se encuentra a la izquierda del 1, es igual al valor del exponente negativo.

Para la utilización de las potencias de 10, se siguen las siguientes reglas:

1. El resultado del producto de dos potencias de la misma base y diferente exponente ($10^m \cdot 10^n$) es una potencia de la misma base y cuyo exponente es la suma de los exponentes (10^{m+n}).
2. El resultado del cociente e dos potencias de la misma base y diferente exponente ($10^m : 10^n$) es una potencia de la misma base y cuyo exponente es la diferencia de los exponentes (10^{m-n}).

Desarrollo de un binomio

El teorema del binomio es muy útil para hacer aproximaciones. Una forma del teorema es

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}x^4 + \ldots..$$

Si n es un número entero positivo, existen n+1 términos en la serie. Si n es un número real diferente de un entero positivo, existe un número infinito de términos.

La serie es particularmente útil cuando $|x|$ es mucho menor que 1; entonces cada término de la ecuación $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2}{3!}x^3 + \ldots..$ es mucho menor que el inmediatamente anterior y se puede prescindir de todos los términos excepto los dos primeros, por tanto

* Si $|x| <<< 1$ entonces $(1+x)^n = 1 + nx$