CÁLCULO VECTORIAL

Operaciones con vectores libres

Suma de vectores libres

La suma de n vectores libres $\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \ldots.\vec{P}_n$ es un vector libre llamado resultante $\vec{R} = R_x\vec{i} + R_y\vec{j} + R_z\bar{k}$, siendo las componentes de $\left(R_x R_y R_z\right)$ la suma de las componentes respectivas.

Producto escalar de dos vectores libres

Por definición es una magnitud escalar igual al producto de los módulos por el coseno del ángulo α que forman los dos vectores

$$\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2 = P_1 \cdot P_2 \cdot \cos\alpha$$

$$\text{Si } \vec{P}_1 = P_{1x}\vec{i} + P_{1y}\vec{j} + P_{1z}\vec{k} \quad \text{y} \quad \vec{P}_2 = P_{2x}\vec{i} + P_{2y}\vec{j} + P_{2z}\vec{k}$$

La expresión analítica del producto escalar de estos dos vectores es:

$$\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2 = P_{1x}P_{2x} + P_{1y}P_{2y} + P_{1z}P_{2z}$$

Como $P_2 \cos\alpha$ es la proyección del vector $\vec{P}_2$ sobre el vector $\vec{P}_1$ resulta que $\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2$ es igual al producto de uno de ellos por la proyección del otro sobre el primero. Si los dos vectores son perpendiculares su producto escalar es nulo.

Producto vectorial de dos vectores libres

El producto vectorial de dos vectores $\vec{P}_1 \wedge \vec{P}_2$, por definición, es otro vector cuyo módulo es $P_1 P_2 \operatorname{sen}\alpha$, la dirección es perpendicular al plano determinado por los dos vectores y sentido el de avance de un tornillo cuya cabeza gire en el sentido del primer vector $\left(\vec{P}_1\right)$ hacia el segundo vector $\left(\vec{P}_2\right)$ por el camino más corto.

La expresión analítica del producto vectorial se obtiene a partir del desarrollo del determinante:

$$\vec{P}_1 \wedge \vec{P}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ P_{1x} & P_{1y} & P_{1z} \\ P_{2x} & P_{2y} & P_{2z} \end{vmatrix} = \left(P_{1y}P_{2z} - P_{1z}P_{2y}\right)\vec{i} + \left(P_{2x}P_{1z} - P_{2z}P_{1x}\right)\vec{j} + \left(P_{1x}P_{2y} - P_{1y}P_{2x}\right)\vec{k}$$

Si los dos vectores son paralelos su producto vectorial es nulo. El módulo del producto vectorial de dos vectores es el área del paralelogramo que determinan los dos vectores.

Vectores deslizantes

Un vector deslizante queda definido por sus componentes y un punto de su recta soporte; consideremos el vector $\vec{P} = \overrightarrow{AB} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$, el punto A($x_1$, y_1, z_1) pertenece a su recta sopote.

Momento de un vector respecto a un punto O (momento central)

El momento respecto a un punto O del vector $A\vec{B}$ es por definición

$$\vec{M}_0 = O\vec{A} \wedge A\vec{B}$$

Es el producto vectorial del vector que une el centro de momentos (O) con el origen del vector (A), por el vector $A\vec{B}$

Momento de un vector respecto a un eje (momento axial)

Es la proyección sobre un eje, del momento resultante del vector $\vec{v}$ respecto a un punto de dicho eje. Consideramos un vector $\vec{v}$, y A(x_A, y_A, x_A) un punto de su recta soporte; si P(x_p, y_p, z_p) son las coordenadas de un punto del eje y $\vec{u}$ el vector director de dicho eje, el momento axial es el producto escala del momento del vector respecto al punto P, por el vector unitario del eje

Sistemas de vectores deslizantes

Resultante general

Dado un sistema de n vectores deslizantes $\{\vec{v}_1;\vec{v}_2;...\vec{v}_n\}$ se llama resultante al vector libre $\vec{R}$ suma de los n vectores equipolentes a los dados: $\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i$

Momento resultante

El momento resultante de un sistema de vectores deslizantes, respecto a un punto O, es la suma de los momentos respecto a O de cada uno de los vectores. Es un vector localizado en el centro de momentos que se considere por lo que va a depender del centro de momentos que se tome

$$\vec{C}_0 = \vec{M}_0(\vec{v}_1) + \vec{M}_0(\vec{v}_2) + ... + \vec{M}_0(\vec{v}_n)$$

Ecuación del cambio de momentos

Si se conoce el momento resultante respecto a un punto O, el momento respecto a otro punto O_1 es $C_{0_1} = C_0 + \vec{0_1 0} \wedge \vec{R}$.

Un sistema es nulo, cuando tienen resultante nula y un momento nulo: $\left.\begin{array}{l} \vec{R} = 0 \\ \vec{C}_0 = 0 \end{array}\right\}$.

El sistema equivale a un par si la resultante es nula y el momento resultante es no nulo $\left.\begin{array}{l} \vec{R} = 0 \\ \vec{C}_0 \neq 0 \end{array}\right\}$

El momento resultante de un par $\vec{C}$ es único para un determinado par, por tanto independiente del centro de momentos que se tome (puede estar aplicado en cualquier punto del espacio).

Si el sistema de vectores no está dentro de los dos casos anteriores, se dice que es equivalente a: un vector $\vec{R}$ y a un momento $\vec{C}_0$ llamado torsor del sistema: $\left\{\begin{array}{l} \vec{R} \\ \vec{C}_0 \end{array}\right.$

Invariantes de un sistema de vectores deslizantes

Se denominan **invariantes** a las cantidades que permanecen constantes para un determinado sistema de vectores independientemente del centro de momentos que se tome; hay tres invariantes:

Primer invariante: el módulo de la resultante $|\vec{R}|$.

Segundo invariante: el producto escalar de la resultante por el momento resultante respecto a cualquier punto es constante $\vec{R} \cdot \vec{C}_0 = \vec{R} \cdot \vec{C}_{0_1}$.

Tercer invariante: es el cociente del segundo invariante y el primer invariante $\frac{\vec{R}\cdot\vec{C}_0}{|\vec{R}|} = |\vec{C}_{min}|$.

Coincide con el módulo del momento mínimo del sistema de vectores. El vector momento mínimo, tiene dirección de la resultante, pudiendo calcular el momento mínimo por la expresión $\vec{C}_{min} = |\vec{C}_{min}|\vec{u}_R$ siendo $\vec{u}_R = \frac{\vec{R}}{R}$ el versor direccional de resultante.

Eje Central

Es el lugar geométrico de todos los puntos del espacio cuyo momento es mínimo para un determinado sistema de vectores; es una recta paralela a la resultante. Para hallar la ecuación que la define es necesario calcular un punto de la misma, su dirección ya es conocida, pues es la de la resultante.

Dado un punto del eje central $E\ (x_E\ y_E\ z_E\ )$, intersección del eje con la perpendicular a él trazada desde el origen de coordenadas, cumple:

$$\vec{OE} = \frac{\vec{R}\wedge\vec{C}_0}{R^2} = x_E\vec{i} + y_E\vec{j} + z_E\vec{k}$$

Si $R_x\ ;\ R_y\ ;\ R_z$ son las componentes del vector $\vec{R}$, la ecuación del eje central en forma continua es

$$\frac{x-x_E}{R_x} = \frac{y-y_E}{R_y} = \frac{z-z_E}{R_z}$$

Reducción de un sistema de vectores

Es la transformación del sistema de vectores en otro lo más simplificado posible y equivalente al primitivo. Para ello, la resultante se aplicará en el punto de la reducción y el momento $\vec{C}_0$ se sustituye por un par $(\vec{P}, -\vec{P})$. De los vectores del par, uno $(-\vec{P})$ se aplica en el punto de la reducción y el otro $\vec{P}$ en un punto $A(x_A, y_A, z_A)$. Como el momento resultante cumple la condición $\vec{C}_0 = \vec{M}_0(\vec{P}) = \vec{OA}\wedge\vec{P}$, el vector $\vec{OA}$ es perpendicular al vector $\vec{C}_0$.

En la práctica, para calcular las coordenadas del punto A se impone la condición de perpendicularidad entre los vectores $\vec{OA}$ y $\vec{C}_0$, es decir $\vec{OA}\cdot\vec{C}_0 = 0$. Si el momento resultante es $\vec{C}_0 = L\vec{i} + M\vec{j} + N\vec{k}$ se obtiene la ecuación $x_A L + y_A M + z_A N = 0$, que tiene tres incógnitas. Para resolver, se dan valores arbitrarios a dos de las coordenadas del punto A y se obtiene la tercera. El punto A tiene infinitas soluciones, depende de los valores arbitrarios considerados.

Para calcular las componentes del par $\vec{P}\left(P_x P_y P_z\right)$ se aplica la ecuación $C_0 = O\vec{A} \wedge \vec{P} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_A & y_A & z_A \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix}$ ❊ El desarrollo da lugar a tres ecuaciones con tres incógnitas, de las cuales una es combinación lineal de las otras dos. El sistema se resuelve dando un valor arbitrario a una de las incógnitas, por lo que el sistema tiene infinitas soluciones.

Derivación de vectores

Un vector es función de una variable o parámetro si lo son sus componentes o al menos una de ellas.

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

El vector $\vec{r}(t)$ describe una curva en el espacio al variar el parámetro t.

Se define derivada de un vector $\vec{r}(t)$ al vector $\vec{r}\,'(t)$ que tiene por componentes las derivadas de las componentes. Es un vector paralelo a la tangente de la curva.

$$\vec{r}\,'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}\,.$$

Si el vector tiene módulo constante, la derivada es perpendicular al vector, pues $\vec{r} \cdot \vec{r} = cte$, y derivando $\vec{r} \cdot \vec{r}\,' + \vec{r}\,' \cdot \vec{r} = 2\vec{r}\,' \cdot r = 0$, lo que indica que $\vec{r}\,'$ es perpendicular a $\vec{r}$.