UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID
E.T.S. de Ingenieros Agrónomos

Cálculo vectorial

Magnitudes escalares y vectoriales

Tipos de vectores

Operaciones con vectores libres

Momento de un vector deslizante respecto a un punto

Momento de un vector deslizante respecto a un eje

Magnitudes escalares

Magnitud perfectamente definida por su valor numérico

Abstractas. No tienen unidades: índice de refracción, rendimiento

Concretas. Tienen unidades:masa (kg), temperatura (K)

Magnitudes vectoriales

Magnitud perfectamente definida cuando se conoce, además de su valor numérico, la dirección sobre la que actúa y sentido: velocidad (m/s), fuerza (N), momento de una fuerza (N·m), ...

Tipos de vectores

Libres: Se conoce módulo, dirección y sentido. Punto de aplicación es cualquiera en el espacio.

Dos vectores libres son iguales si son superponibles mediante una traslación en el espacio

Tipos de vectores

Deslizantes: Se conoce módulo, dirección, sentido y recta soporte. El punto de aplicación es cualquiera sobre la recta soporte.

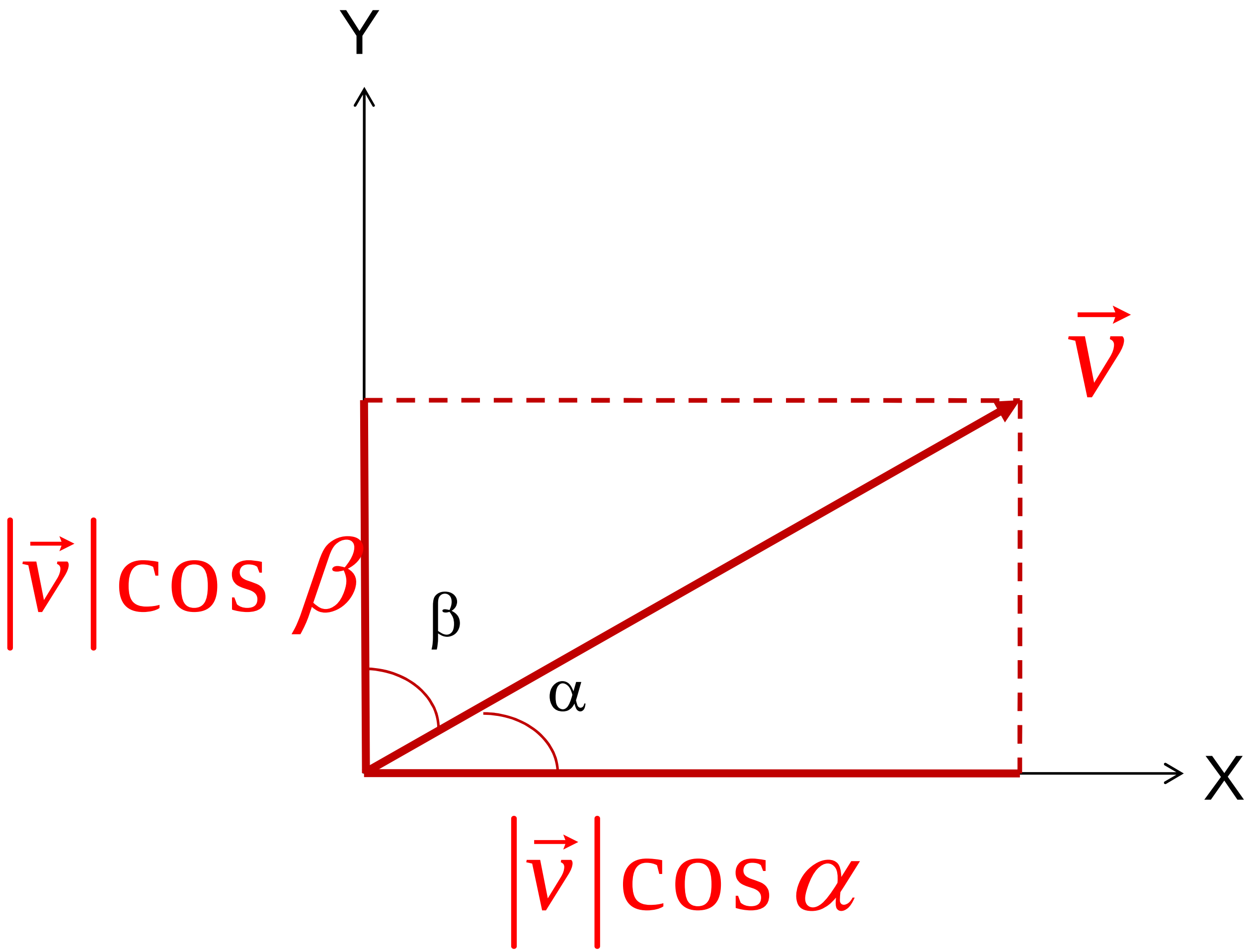
Dos vectores deslizantes son iguales si son superponibles mediante un deslizamiento a lo largo de la recta soporte

Tipos de vectores

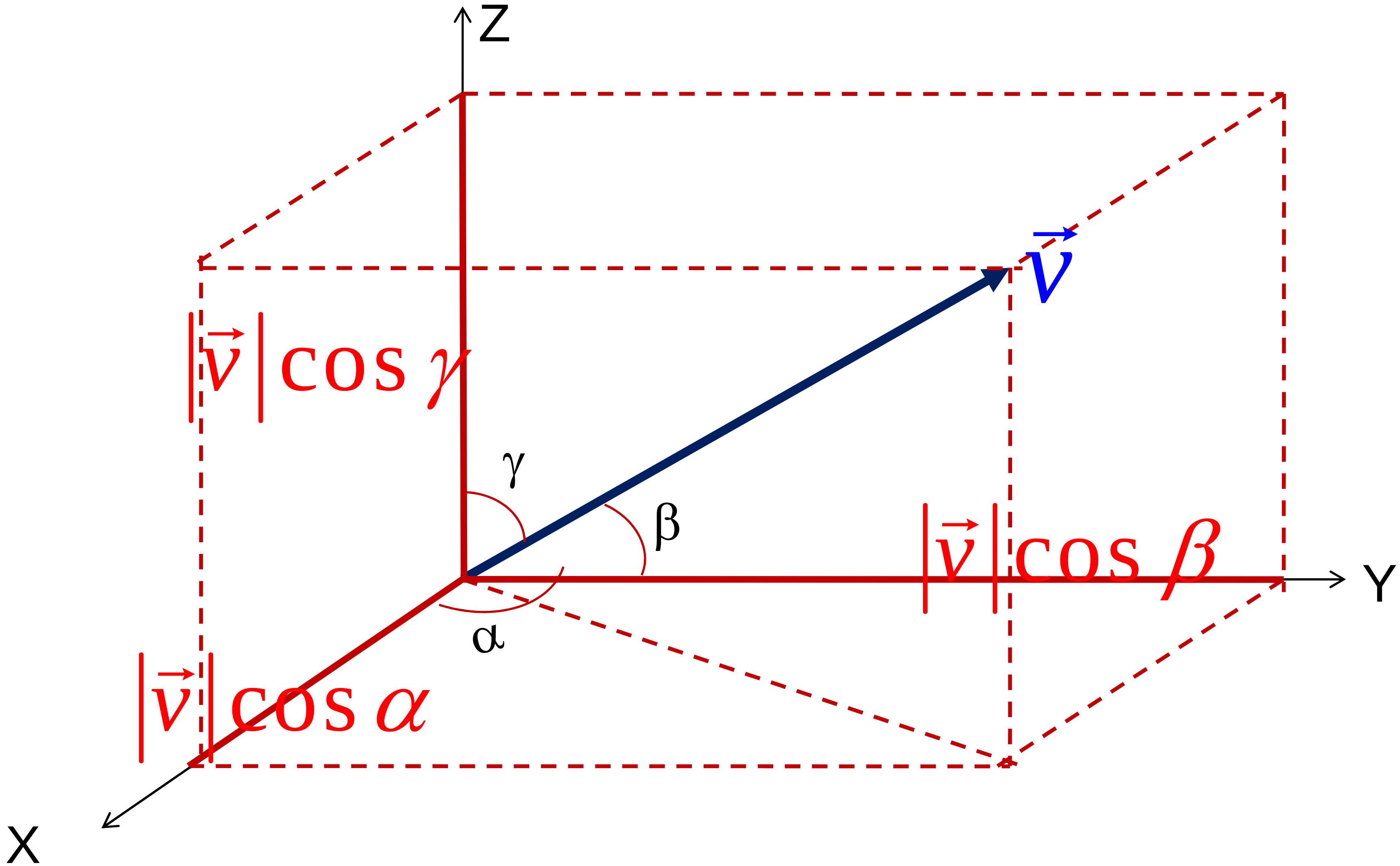
Localizados: Se conoce módulo, dirección, sentido y punto de aplicación.

Dos vectores localizados sólo pueden ser iguales a sí mismos

Representación vectorial 2D

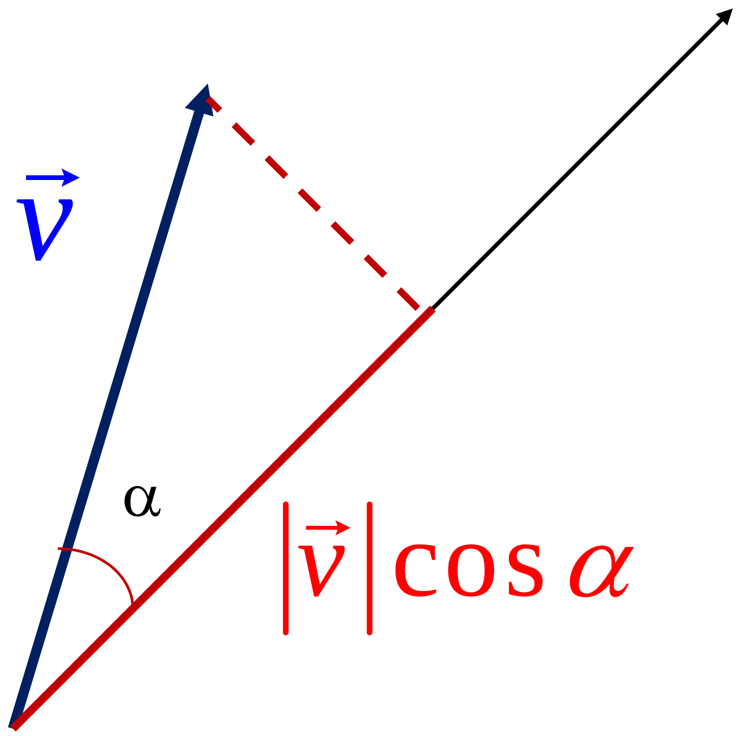


Representación vectorial 3D



Componentes de un vector

Proyección del vector sobre un eje



Vectores unitarios

Un vector unitario es un vector sin unidades de módulo unidad; se utilizan para especificar la dirección y sentido

El vector unitario que especifica la dirección y sentido de un vector se calcula mediante el cociente entre dicho vector y su módulo

Vectores unitarios

Los vectores unitarios, sobre los ejes cartesianos se expresan por

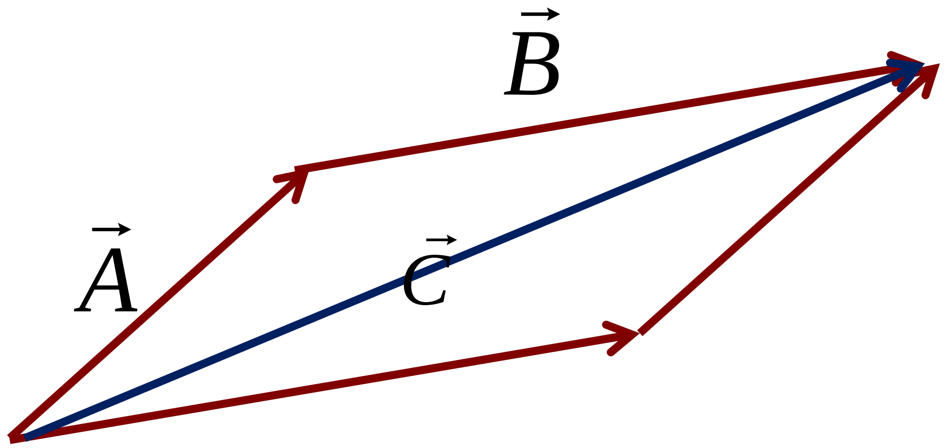
$$\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\vec{k}$$

Operaciones con vectores libres

Suma gráfica de vectores

Regla del paralelogramo (2 vectores)

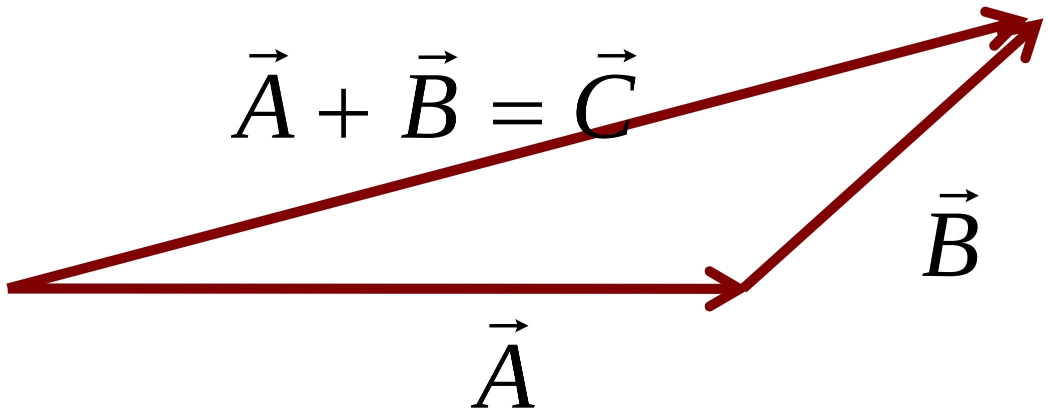
$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$$



El vector suma es la diagonal del paralelogramo formado por los dos vectores

Suma gráfica de vectores

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$$

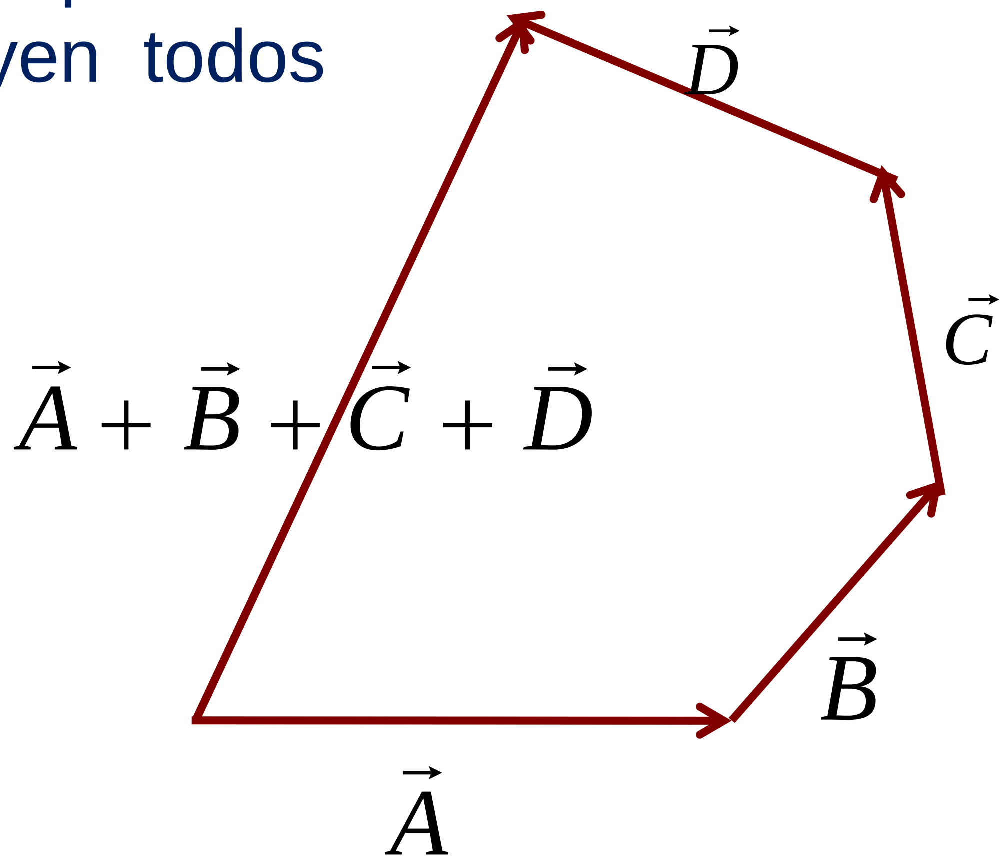


En el extremo del primero se sitúa el origen del segundo

La suma es un vector cuyo origen es el origen del primero y su extremo es el extremo del segundo

Suma gráfica de vectores

Cuando se tienen muchos vectores se repite el proceso hasta que se incluyen todos los vectores

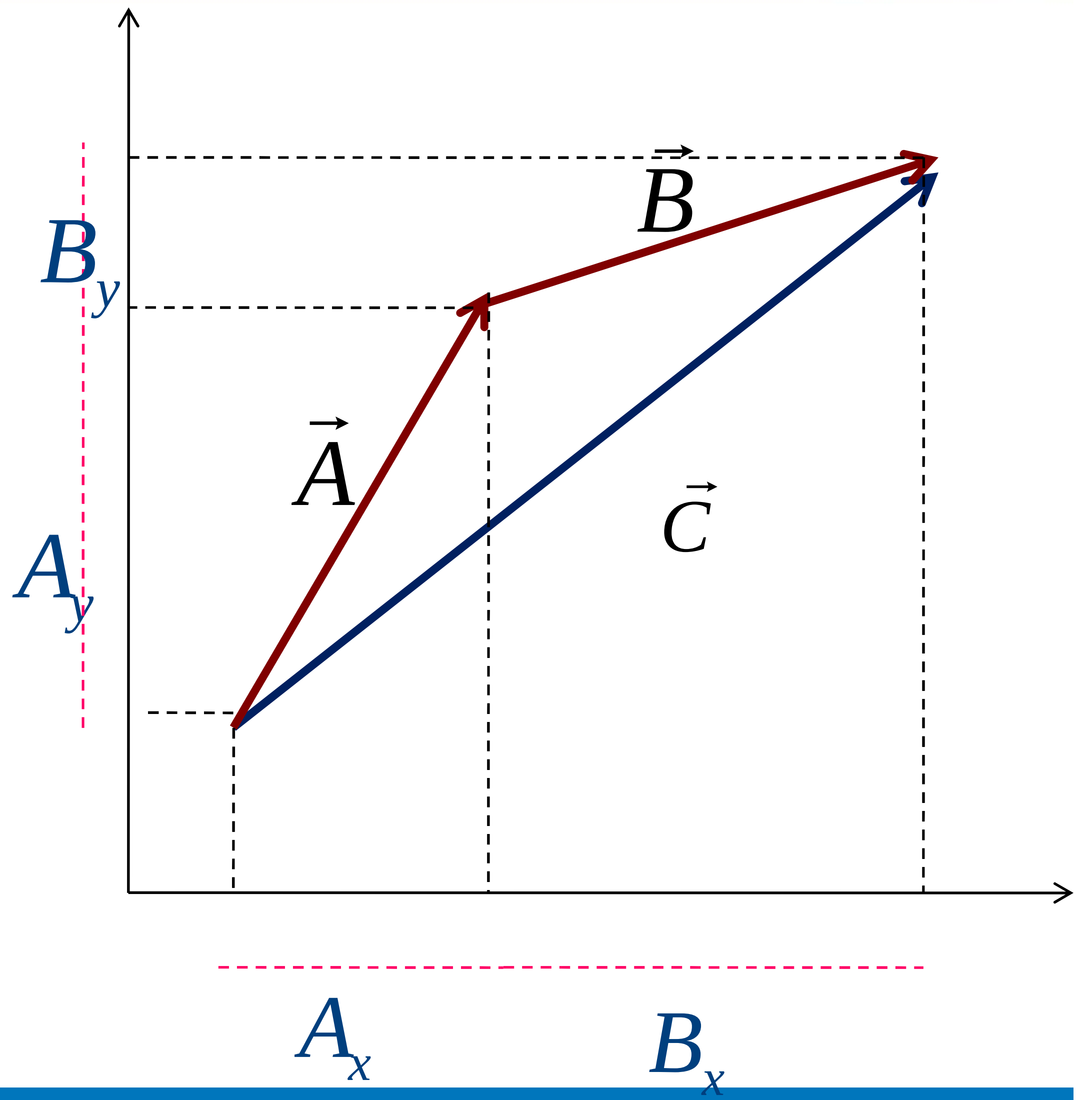


Suma de vectores. Componentes

La proyección del vector suma sobre un eje, es la suma de las proyecciones de los vectores sobre dicho eje

$$C_x = A_x + B_x$$

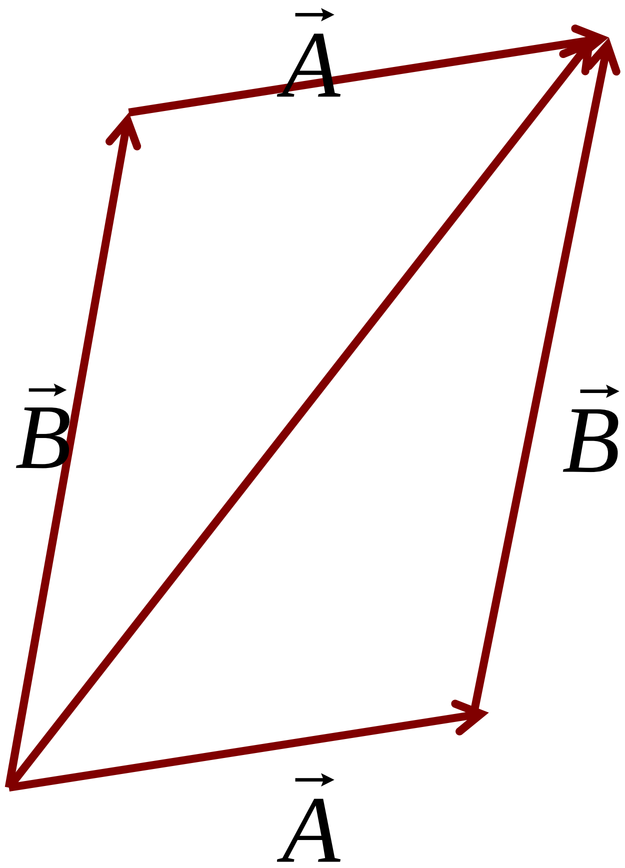
$$C_y = A_y + B_y$$



Propiedades de la suma. Conmutativa

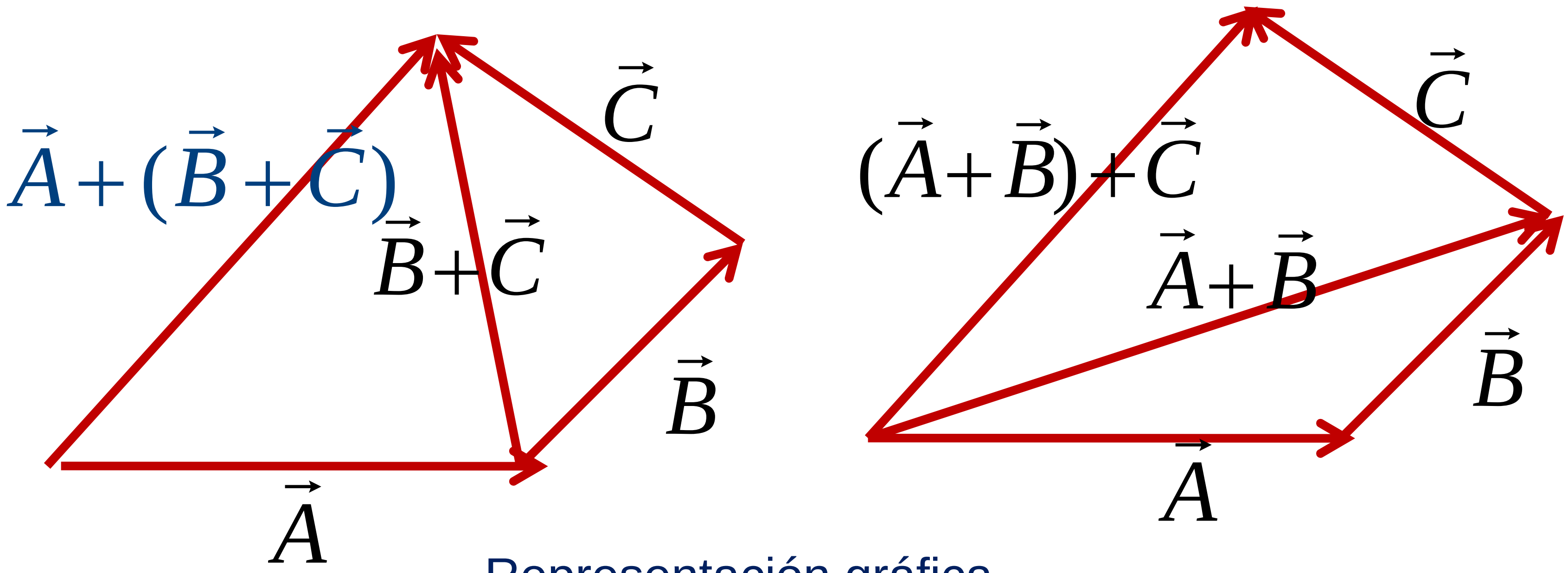
$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$

Representación gráfica



Propiedades de la suma. Asociativa

$$\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})=(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}$$



Representación gráfica

Multiplicación de un vector por un escalar

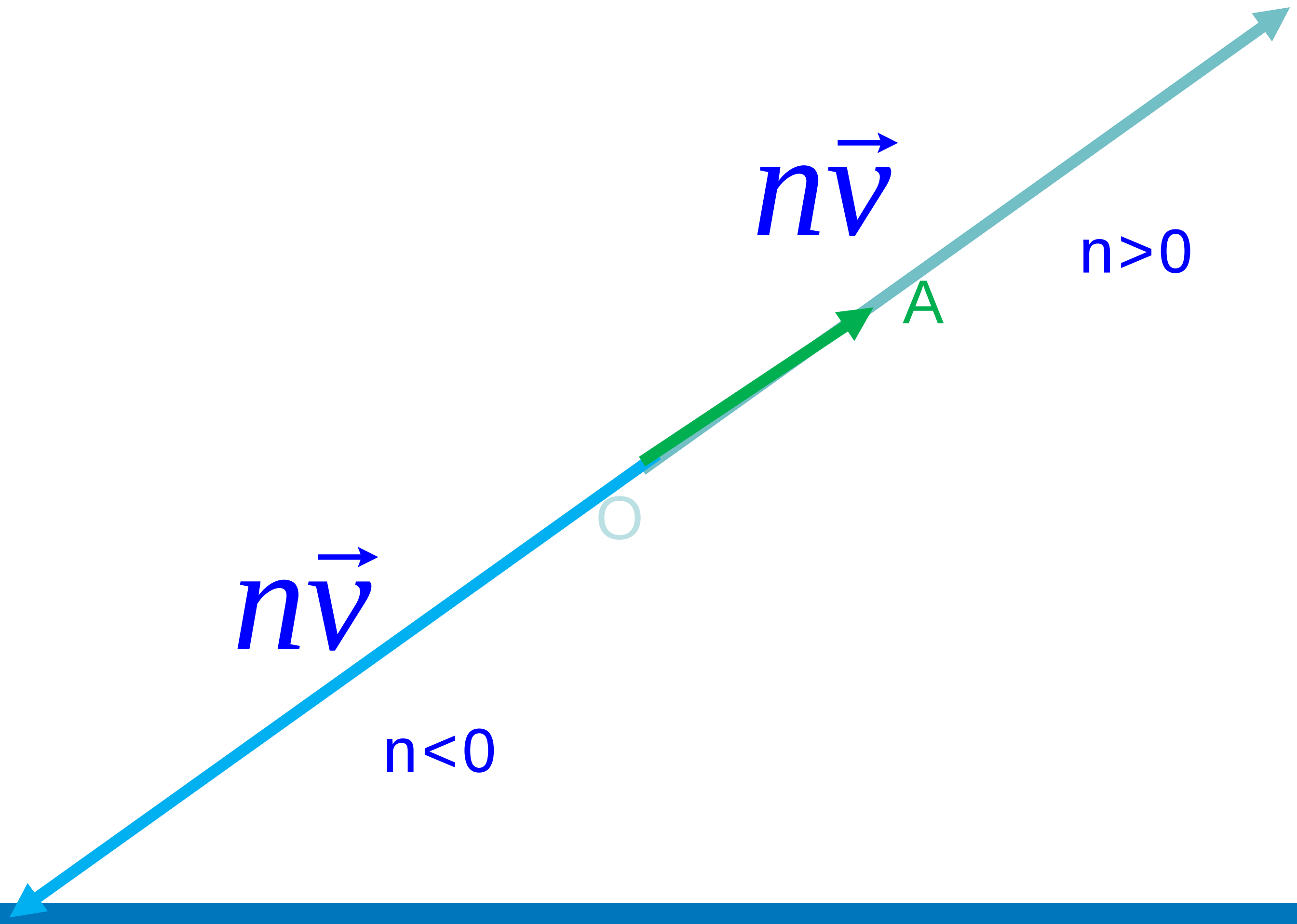
El resultado es un vector cuyo módulo es el producto del escalar por el módulo del vector

Si el escalar es positivo, la dirección y sentido son los mismos que los del vector original

Si el escalar es negativo, la dirección del resultado es la misma que la del vector original, pero su sentido es opuesto

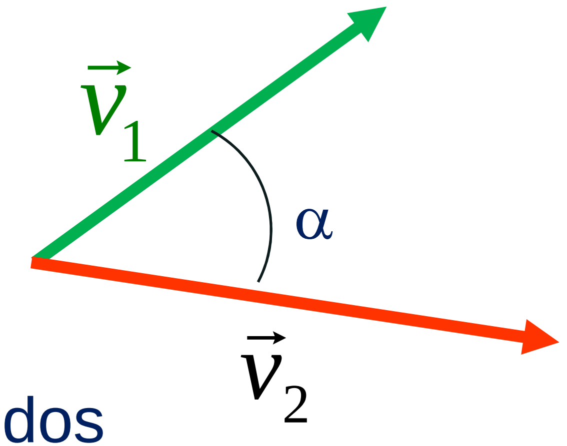
Multiplicación de un vector por un escalar

n $\vec{v}$



Producto escalar de dos vectores

Es un escalar



El valor del producto escalar de dos vectores es el producto de los módulos por el coseno del ángulo que forman los vectores

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \left|\vec{v}_1\right| \left|\vec{v}_2\right| \cos\alpha$$

Propiedades del producto escalar

1. Conmutativa

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1$$

2. Asociativa respecto al producto por un escalar

$$n\left(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2\right) = \left(n\vec{v}_1\right) \cdot \vec{v}_2 = \left(n\vec{v}_2\right) \cdot \vec{v}_1$$

$$n\left(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2\right) = \left(n\vec{v}_1\right) \cdot \vec{v}_2 = \left(n\vec{v}_2\right) \cdot \vec{v}_1$$

Propiedades del producto escalar

3. Distributiva respecto a la suma de vectores

$$\vec{v}_1 \cdot \left(\vec{v}_2 + \vec{v}_3 \right) = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3$$

4. No asociativa respecto a productos escalares sucesivos

$$\vec{v}_1 \cdot \left(\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 \right) \neq \left(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \right) \cdot \vec{v}_3$$

Propiedades del producto escalar

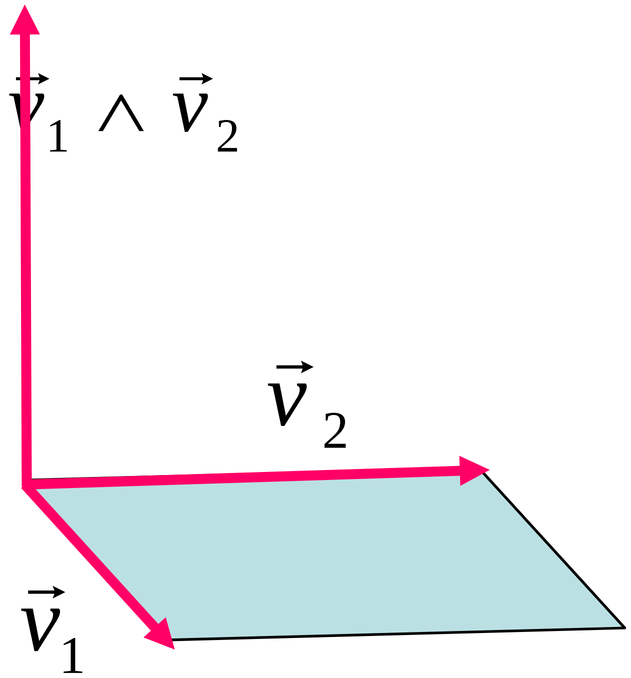
$$\vec{i}\cdot\vec{i}=1 \qquad \vec{j}\cdot\vec{j}=1 \qquad \vec{k}\cdot\vec{k}=1$$

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=0 \qquad \vec{i}\cdot\vec{k}=0 \qquad \vec{j}\cdot\vec{k}=0$$

$$\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2=\left(v_{1x}\vec{i}+v_{1y}\vec{j}+v_{1z}\vec{k}\right)\cdot\left(v_{2x}\vec{i}+v_{2y}\vec{j}+v_{2z}\vec{k}\right)=$$

$$=v_{1x}v_{2y}+v_{1y}v_{2y}+v_{1z}v_{2z}$$

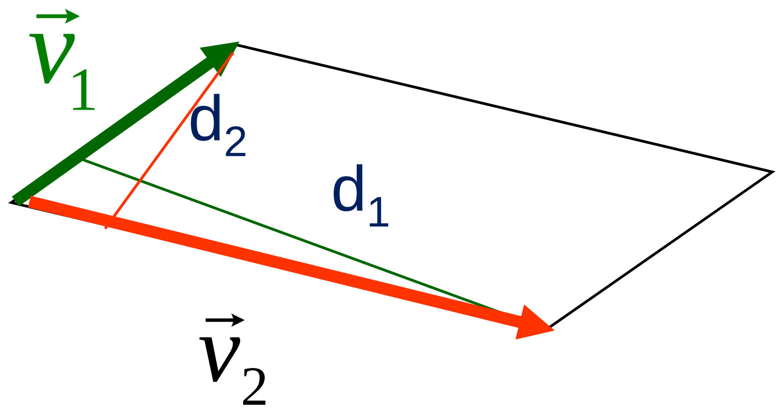
Producto vectorial de dos vectores



Es un vector: Módulo es el producto de los módulos por el seno del ángulo que determinan; la dirección, perpendicular a ambos vectores y el sentido se determina por la regla de la mano derecha

Producto vectorial. Módulo

El módulo representa el área del paralelogramo que determinan



$$Area = \left|\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2\right| = \left|\vec{v}_1\right|\left|\vec{v}_2\right| \operatorname{sen}\varphi = \left|\vec{v}_1\right| d_1 = \left|\vec{v}_2\right| d_2$$

Propiedades del producto vectorial

1. No conmutativa

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = -\left(\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1\right)$$

2. Asociativa respecto al producto por un escalar

$$n\left(\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2\right) = \left(n\vec{v}_1\right) \wedge \vec{v}_2 = \left(n\vec{v}_2\right) \wedge \vec{v}_1$$

Propiedades del producto vectorial

3. Distributiva respecto a la suma de vectores

$$\vec{v}_1 \wedge \left(\vec{v}_2 + \vec{v}_3 \right) = \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_3$$

4. No asociativa respecto a productos vectoriales sucesivos

$$\vec{v}_1 \wedge \left(\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3 \right) \neq \left(\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \right) \wedge \vec{v}_3$$

Propiedades del producto vectorial

$$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{0} \qquad \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{0} \qquad \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$$

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \qquad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \qquad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$$

$$\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k} \qquad \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i} \qquad \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$$

Propiedades del producto vectorial

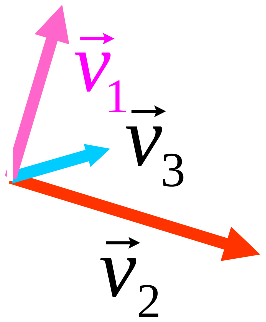
$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \left(v_{1x}\vec{i} + v_{1y}\vec{j} + v_{1z}\vec{k}\right) \wedge \left(v_{2x}\vec{i} + v_{2y}\vec{j} + v_{2z}\vec{k}\right) =$$

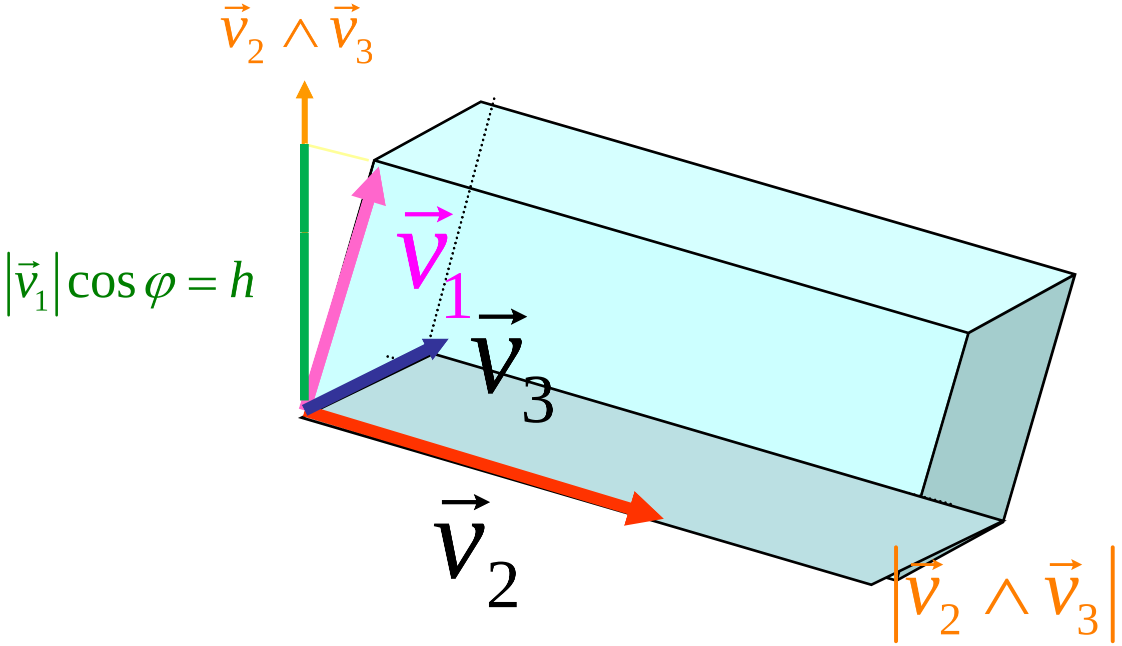
$$= \vec{i}\,(v_{1y}v_{2z} - v_{2y}v_{1z}) - \vec{j}\,(v_{1x}v_{2z} - v_{2x}v_{1z}) + \vec{k}\,(v_{1x}v_{2y} - v_{2x}v_{1y}) =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_{1x} & v_{1y} & v_{1z} \\ v_{2x} & v_{2y} & v_{2z} \end{vmatrix}$$

Producto mixto: Volumen del paralelepípedo

$$\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3)$$





Producto mixto

$$\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3) = \left(v_{1x}\vec{i} + v_{1y}\vec{j} + v_{1z}\vec{k}\right) \cdot \left[\left(v_{2x}\vec{i} + v_{2y}\vec{j} + v_{2z}\vec{k}\right) \wedge \left(v_{3x}\vec{i} + v_{3y}\vec{j} + v_{3z}\vec{k}\right)\right]$$

$$\left|\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3\right| \left|\vec{v}_1\right| \cos\varphi = \left(v_{1x}\vec{i} + v_{y1}\vec{j} + v_{1z}\vec{k}\right) \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_{2x} & v_{2y} & v_{2z} \\ v_{3x} & v_{3y} & v_{3z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_{1x} & v_{1y} & v_{1z} \\ v_{2x} & v_{2y} & v_{2z} \\ v_{3x} & v_{3y} & v_{3z} \end{vmatrix}$$

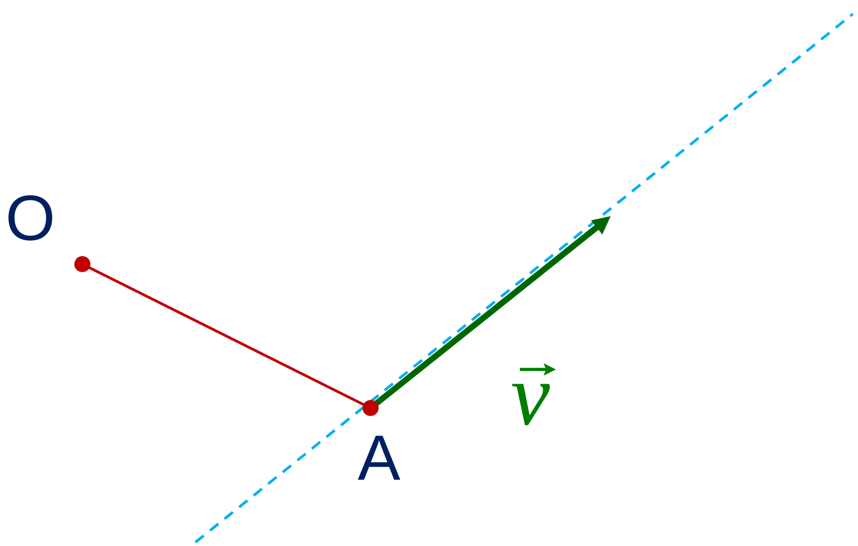
Doble producto vectorial

$$\vec{v}_1 \wedge \left(\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3\right) = \left(v_{1x}\vec{i} + v_{1y}\vec{j} + v_{1z}\vec{k}\right) \wedge \left[\left(v_{2x}\vec{i} + v_{2y}\vec{j} + v_{2z}\vec{k}\right) \wedge \left(v_{3x}\vec{i} + v_{3y}\vec{j} + v_{3z}\vec{k}\right)\right]$$

$$\vec{v}_1 \wedge \left(\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3\right) = \vec{v}_2 \cdot \left(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3\right) - \vec{v}_3 \cdot \left(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2\right)$$

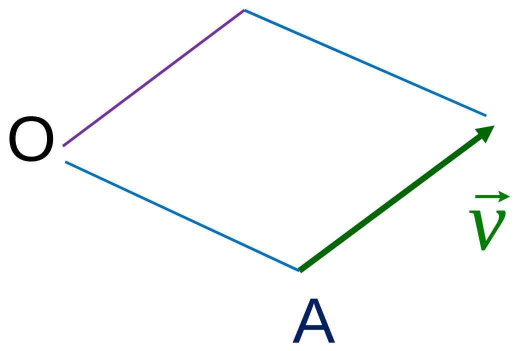
Momento de un vector deslizante respecto a un punto

Momento del vector deslizante $\vec{v}$ respecto a O



$$\vec{M}_O = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{v}$$

Momento de un vector deslizante respecto a un punto



Vector localizado en O

Perpendicular al plano que determinan los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\vec{v}$

Módulo: el área que determinan los vectores

$$\vec{M}_O = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{v}$$

Sentido, el de avance de un tornillo que gira del primero al segundo

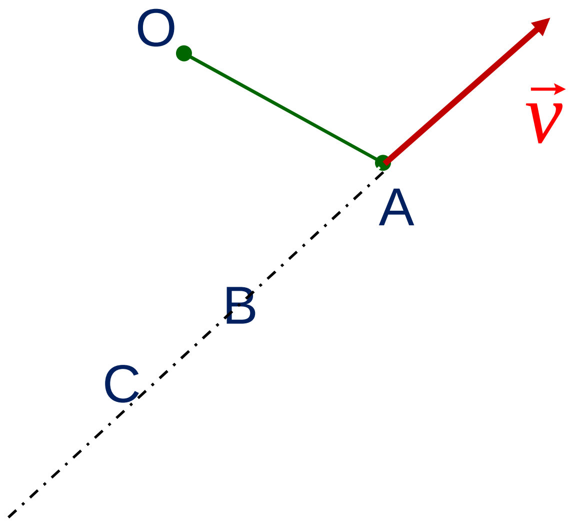
Momento de un vector deslizante respecto a un punto

1. El momento de un vector respecto a un punto es único es independiente de la posición del vector a lo largo de la recta soporte

2. El momento de un vector respecto a un punto de la recta soporte es nulo

3. Conociendo el momento respecto a un punto se puede conocer respecto a otro (ec. Cambio de momentos

Momento de un vector deslizante respecto a un punto



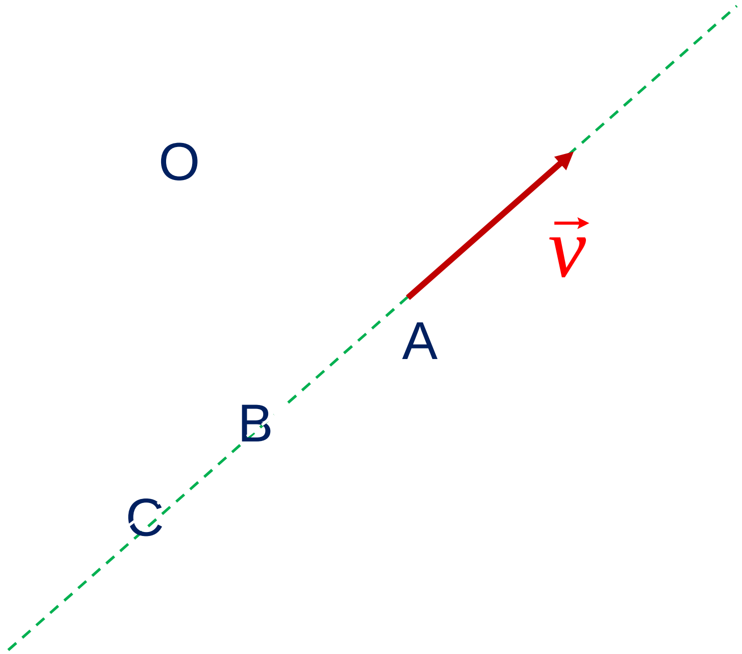
1. Independiente de la posición del vector deslizante sobre la recta soporte

$$\vec{M}_O = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{v} = \overrightarrow{OB} \wedge \vec{v} = \overrightarrow{OC} \wedge \vec{v}$$

$$\overrightarrow{OB} \wedge \vec{v} = \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}\right) \wedge \vec{v} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{v} + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{v}$$

$$\overrightarrow{OC} \wedge \vec{v} = \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}\right) \wedge \vec{v} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{v} + \overrightarrow{AC} \wedge \vec{v}$$

Momento de un vector deslizante respecto a un punto

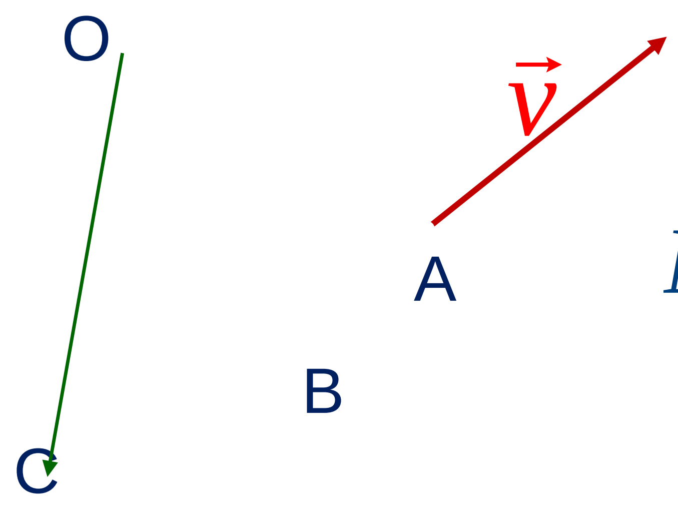


2. El momento respecto a un punto de la recta soporte es nulo

$$\vec{M}_B = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{v} = \vec{0}$$

El producto vectorial de dos vectores paralelos es nulo

3. Ecuación del cambio de momento



$$\vec{M}_O = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{v}$$

$$\vec{M}_C(\vec{v}) = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{v} = \left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CA}\right) \wedge \vec{v} = \overrightarrow{OC} \wedge \vec{v} + \overrightarrow{CA} \wedge \vec{v}$$

$$\vec{M}_C(\vec{v}) = \vec{M}_O(\vec{v}) + \overrightarrow{CA} \wedge \vec{v}$$

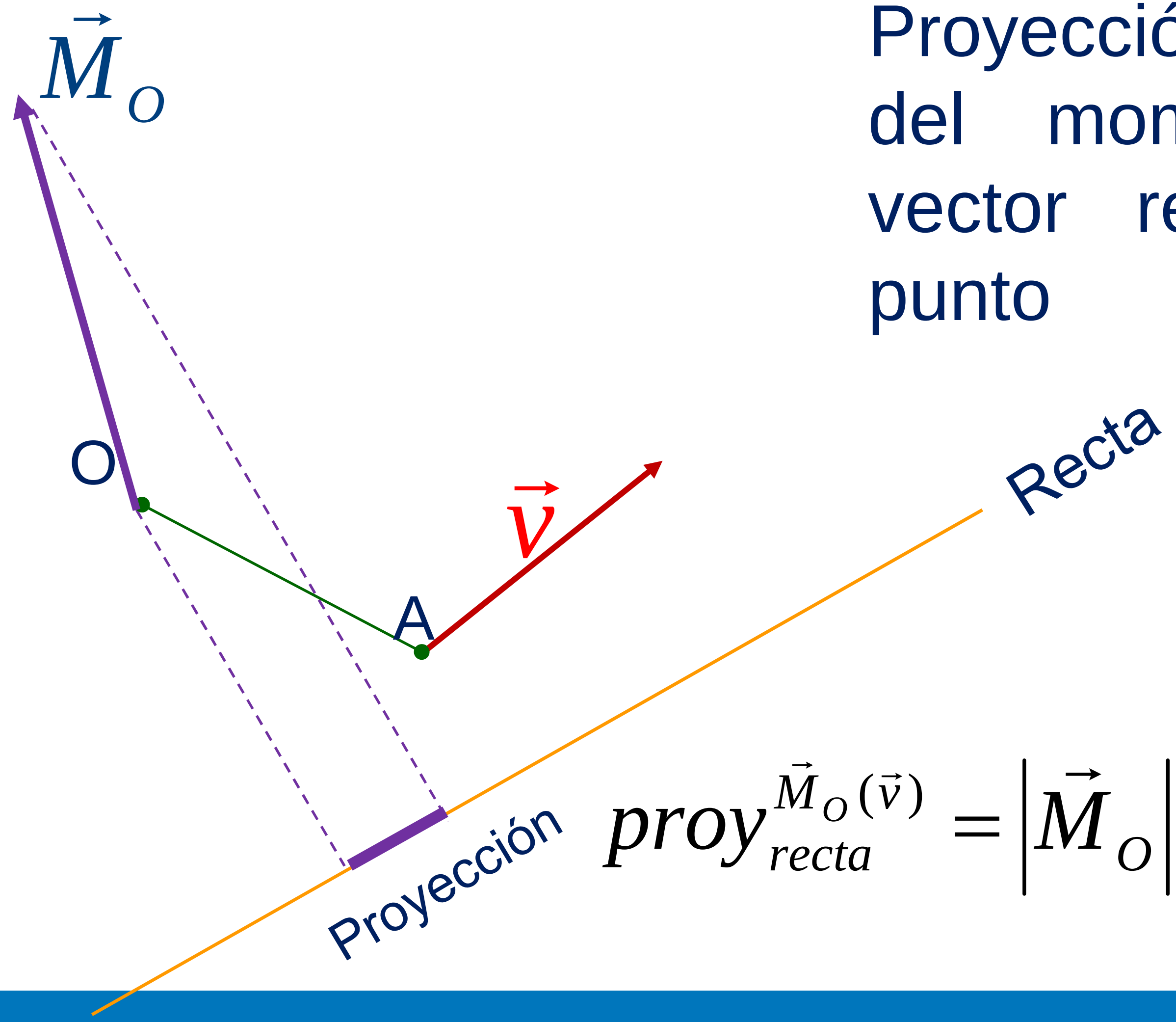
Momento de una fuerza respecto a un punto

El momento de una fuerza respecto a un punto es el producto vectorial del vector que une el centro de momentos y el origen de la fuerza y el vector fuerza aplicada.

Es perpendicular al plano formado por los dos vectores

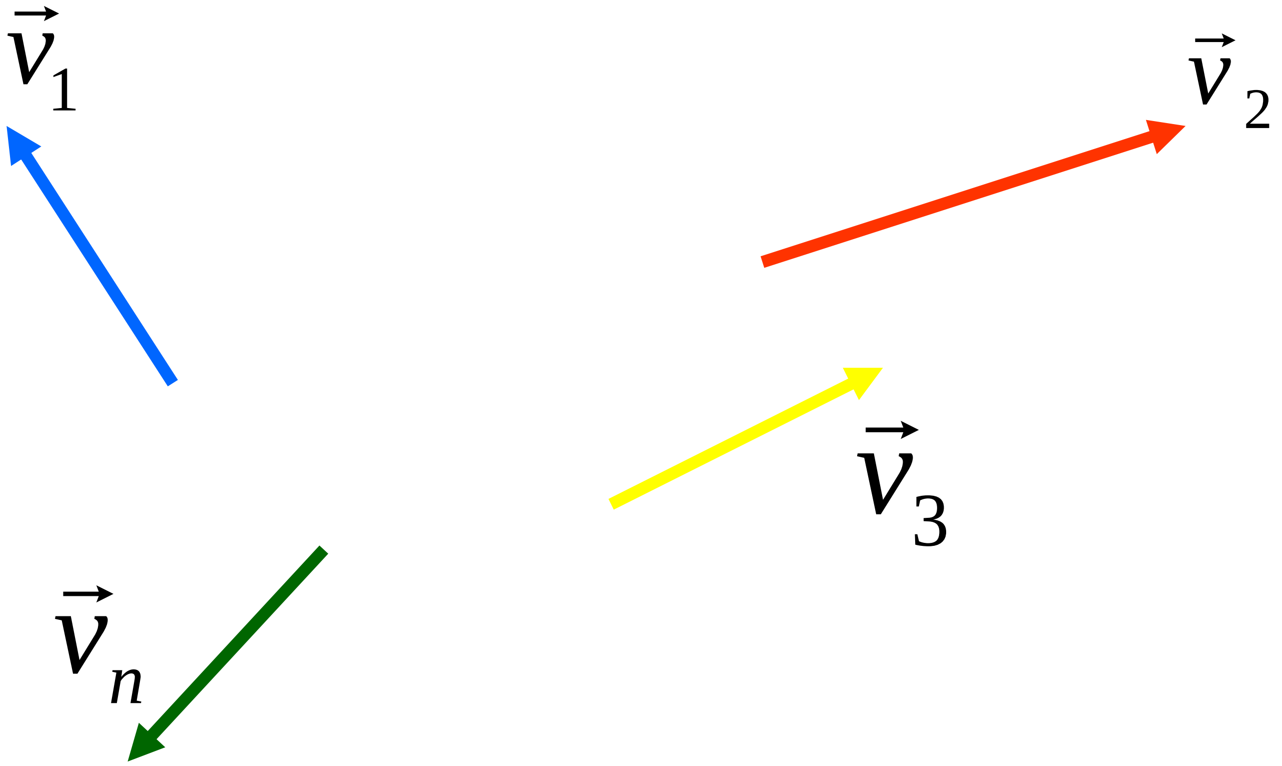
Momento de un vector deslizante respecto a un eje

Proyección sobre un eje del momento de un vector respecto a un punto



$$proy_{recta}^{\vec{M}_O(\vec{v})} = \left|\vec{M}_O\right| \cos\varphi = \vec{M}_O \cdot \vec{u}_{recta}$$

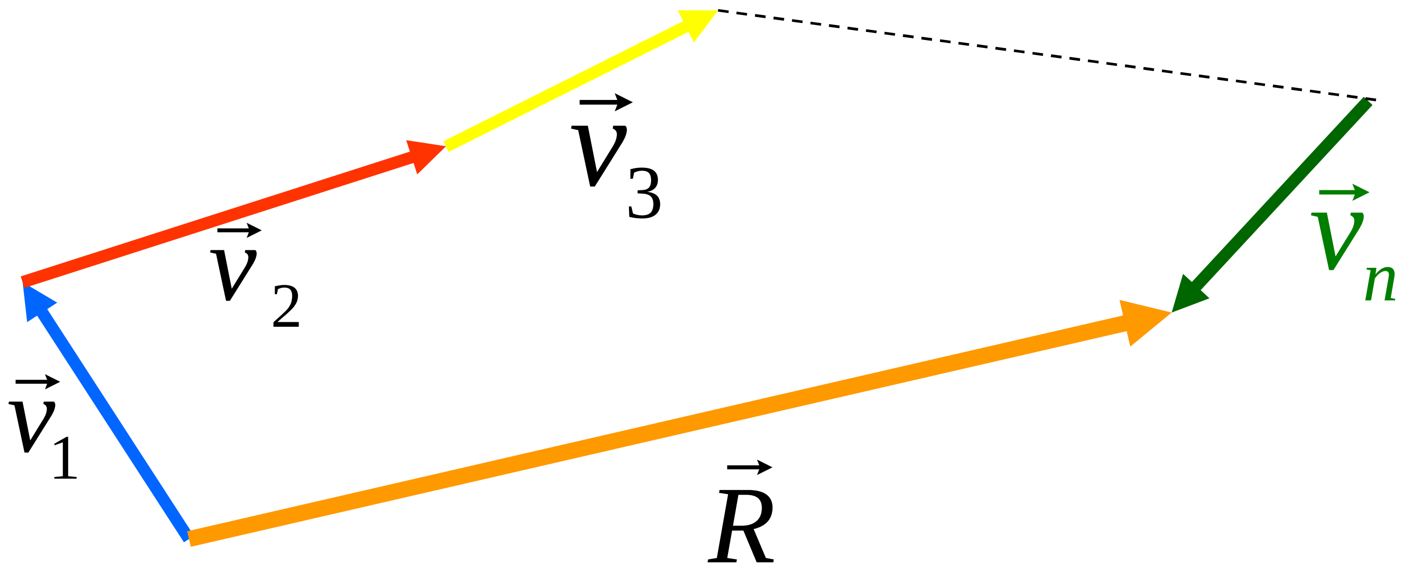
Constituidos por n vectores deslizantes



Sistemas de vectores deslizantes

Resultante general: Suma vectorial de los n vectores que constituyen el sistema

$$\vec{R} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \ldots\ldots + \vec{v}_n$$



Momento resultante respecto a un punto P: es la suma vectorial de los n momentos, respecto al punto P, de los n vectores que constituyen el sistema

$$\vec{C}_P = \vec{M}_P(\vec{v}_1) + \vec{M}_P(\vec{v}_2) + \ldots\ldots + \vec{M}_P(\vec{v}_n)$$

$$\vec{C}_O = \vec{M}_O(\vec{v}_1) + \vec{M}_O(\vec{v}_2) + \ldots\ldots + \vec{M}_O(\vec{v}_n)$$

1. No es independiente del centro de momentos. El momento respecto a O es distinto que respecto a P

2. Ecuación del cambio de momentos

$$\vec{C}_{O'} = \overrightarrow{O'A_1} \wedge \vec{v}_1 + \overrightarrow{O'A_2} \wedge \vec{v}_2 + \overrightarrow{O'A_3} \wedge \vec{v}_3 + \ldots \overrightarrow{O'A_n} \wedge \vec{v}_n$$

$$\vec{C}_{O'} = \left(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA_1}\right) \wedge \vec{v}_1 + \left(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA_2}\right) \wedge \vec{v}_2 +$$

$$+\left(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA_3}\right) \wedge \vec{v}_3 + \ldots \left(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA_n}\right) \wedge \vec{v}_n =$$

Para que el momento sea independiente del punto respecto del que se calcula el momento

$$\vec{C}_{O'} = \vec{C}_{O} = \vec{C}_{O''} = \ldots\vec{C}_{M}$$

$$\vec{C}_{O'} = \vec{C}_{O} + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{R}$$

$$\Downarrow$$

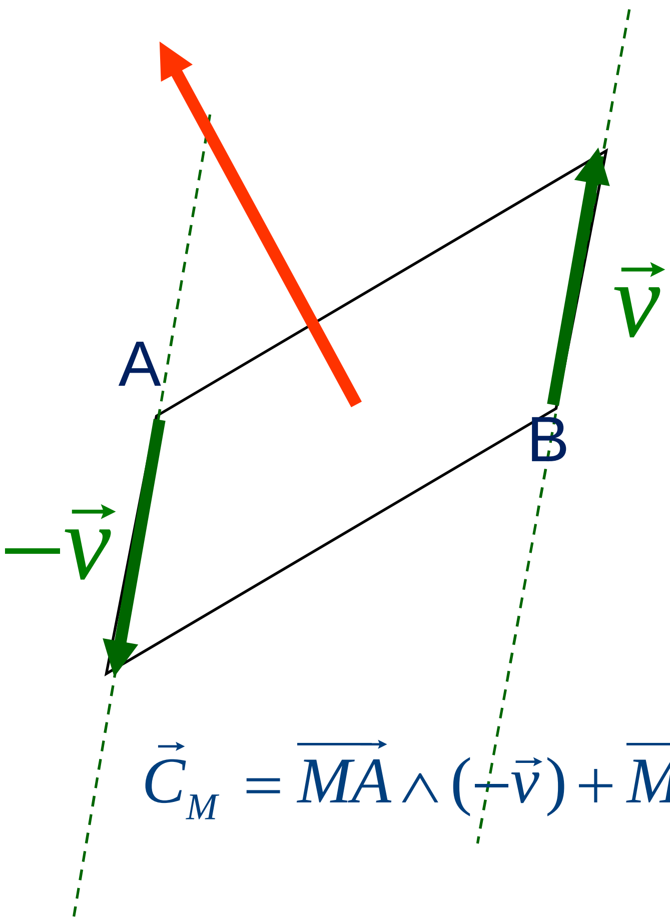
$$\overrightarrow{O'O} \wedge \vec{R} = \vec{0}$$

Sistemas de vectores deslizantes. Pares

Un sistema de vectores deslizantes, cuya resultante es nula y el momento resultante es independiente del punto respecto al que se calcula el momento equivale a un par

Un par está formado por dos vectores de igual módulo, direcciones paralelas y sentidos opuestos

Sistemas de vectores deslizantes. Pares

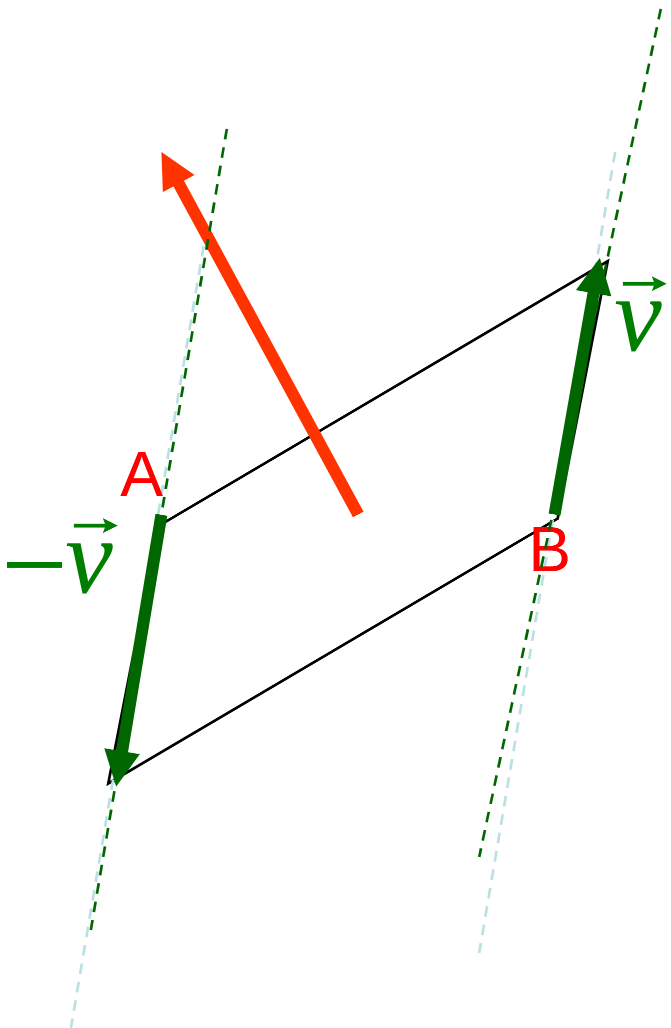


$$\vec{C}_A = \overrightarrow{AA} \wedge (-\vec{v}) + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{v} = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{v}$$

$$\vec{C}_B = \overrightarrow{BA} \wedge (-\vec{v}) + \overrightarrow{BB} \wedge \vec{v} = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{v}$$

$$\vec{C}_M = \overrightarrow{MA} \wedge (-\vec{v}) + \overrightarrow{MB} \wedge \vec{v} = -\overrightarrow{MA} \wedge \vec{v} + \overrightarrow{MB} \wedge \vec{v} = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{v}$$

Es perpendicular al plano que determinan los vectores



$$\left|\vec{C}_A\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\vec{v}\right| sen\varphi$$

El momento del par es un vector perpendicular a ambos vectores y su módulo es igual al área del paralelogramo que determinan

Invariantes de un sistema de vectores deslizantes

Magnitudes que no cambian al cambiar el centro de momentos

1.Resultante general: tanto el vector, como el módulo, como la norma son independientes del centro de momentos

$$\vec{R} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \ldots\ldots + \vec{v}_n = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k}$$

$$\left|\vec{R}\right| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

$$\left|\vec{R}\right|^2 = R_x^2 + R_y^2 + R_z^2$$

Invariantes de un sistema de vectores deslizantes

2.Producto escalar de la resultante general y el momento resultante respecto a un punto cualquiera

$$\vec{R}\cdot\vec{C}_O = \vec{R}\cdot\vec{C}_A = \vec{R}\cdot\vec{C}_B = \ldots\ldots = \vec{R}\cdot\vec{C}_P = Cte$$

3.Cociente entre el segundo invariante y el primero. También se denomina momento mínimo por coincidir con el valor mínimo que tiene que tener el momento resultante

$$\frac{\vec{R}\cdot\vec{C}_O}{\left|\vec{R}\right|} = \frac{\vec{R}\cdot\vec{C}_A}{\left|\vec{R}\right|} = \frac{\vec{R}\cdot\vec{C}_B}{\left|\vec{R}\right|} = \ldots\ldots = \frac{\vec{R}\cdot\vec{C}_P}{\left|\vec{R}\right|} = Cte$$

Sistemas de vectores deslizantes. 3º invariante

$$\frac{\vec{R}\cdot\vec{C}_O}{|\vec{R}|} = \frac{\vec{R}\cdot\vec{C}_A}{|\vec{R}|} = \frac{\vec{R}\cdot\vec{C}_B}{|\vec{R}|} = \ldots\ldots = \frac{\vec{R}\cdot\vec{C}_P}{|\vec{R}|} = Cte$$

$$|\vec{C}_O|\cdot\vec{u}_R \cos\varphi_1 = |\vec{C}_A|\cdot\vec{u}_R \cos\varphi_2 = |\vec{C}_B|\cdot\vec{u}_R \cos\varphi_3 = \ldots\ldots |\vec{C}_P|\cdot\vec{u}_R \cos\varphi_n = Cte$$

$$|\vec{C}_O|\cos\varphi_1 = |\vec{C}_A|\cos\varphi_2 = |\vec{C}_B|\cos\varphi_3 = \ldots\ldots |\vec{C}_P|\cos\varphi_n = Cte$$

Proyección del momento, respecto a O, sobre la dirección de la resultante

Proyección del momento, respecto a A, sobre la dirección de la resultante

Proyección del momento, respecto a B, sobre la dirección de la resultante

Proyección del momento, respecto a M, sobre la dirección de la resultante

Sistemas de vectores deslizantes. 3º invariante

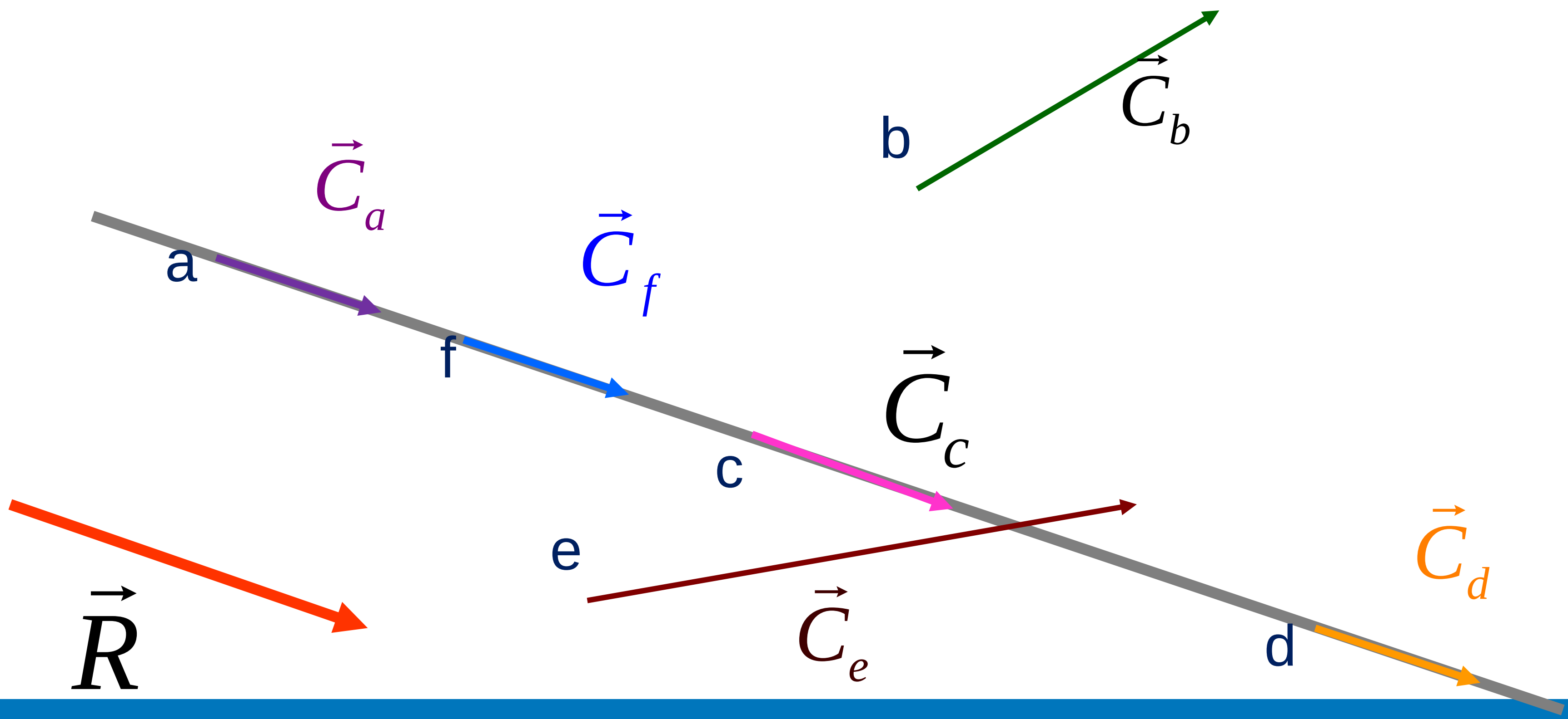
Cuanto mayor es el módulo del momento menor es el coseno del ángulo (y mayor es el ángulo) y viceversa

Cuando el ángulo es cero, el coseno toma el máximo valor, y el momento toma el mínimo

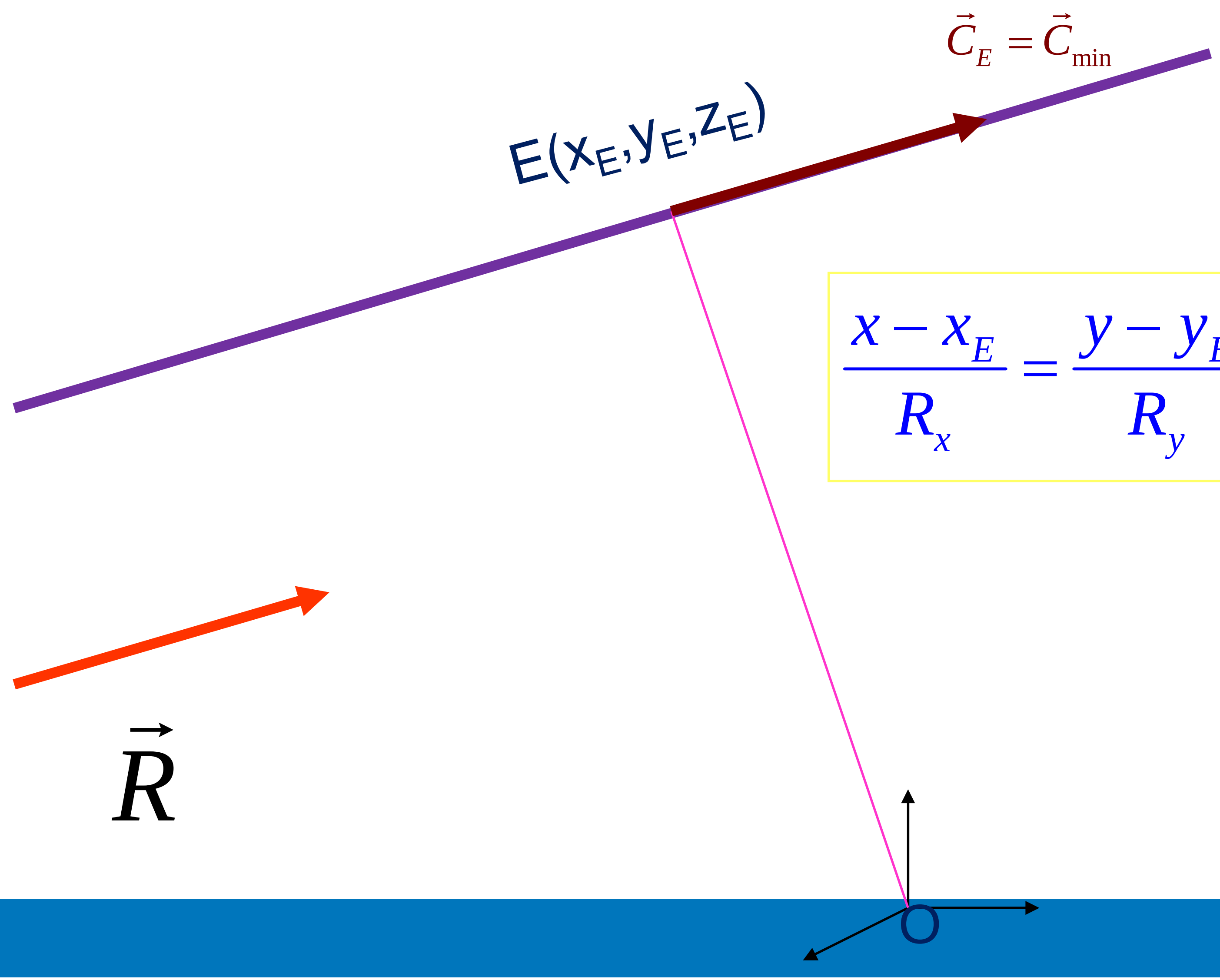
$$\left|\vec{C}_O\right|\cos\varphi_1=\left|\vec{C}_A\right|\cos\varphi_2=\left|\vec{C}_B\right|\cos\varphi_3=\ldots\ldots=\left|\vec{C}_P\right|\cos\varphi_n=\left|\vec{C}_{\min}\right|\cos 0=\left|\vec{C}_{\min}\right|=Cte$$

Eje central de un sistema de vectores deslizantes

Lugar geométrico de los puntos del espacio, respecto de los cuales el momento es mínimo (por tanto, paralelo a la resultante general)



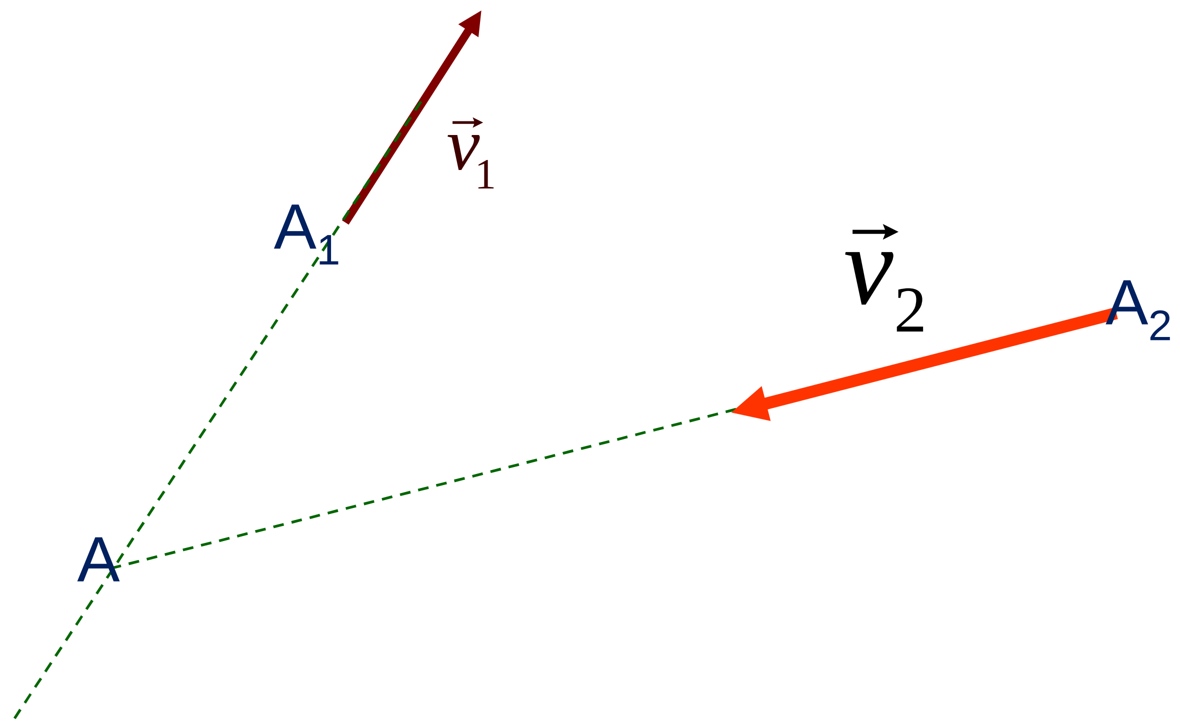
Eje central de un sistema de vectores deslizantes



$$\frac{x - x_E}{R_x} = \frac{y - y_E}{R_y} = \frac{z - z_E}{R_z}$$

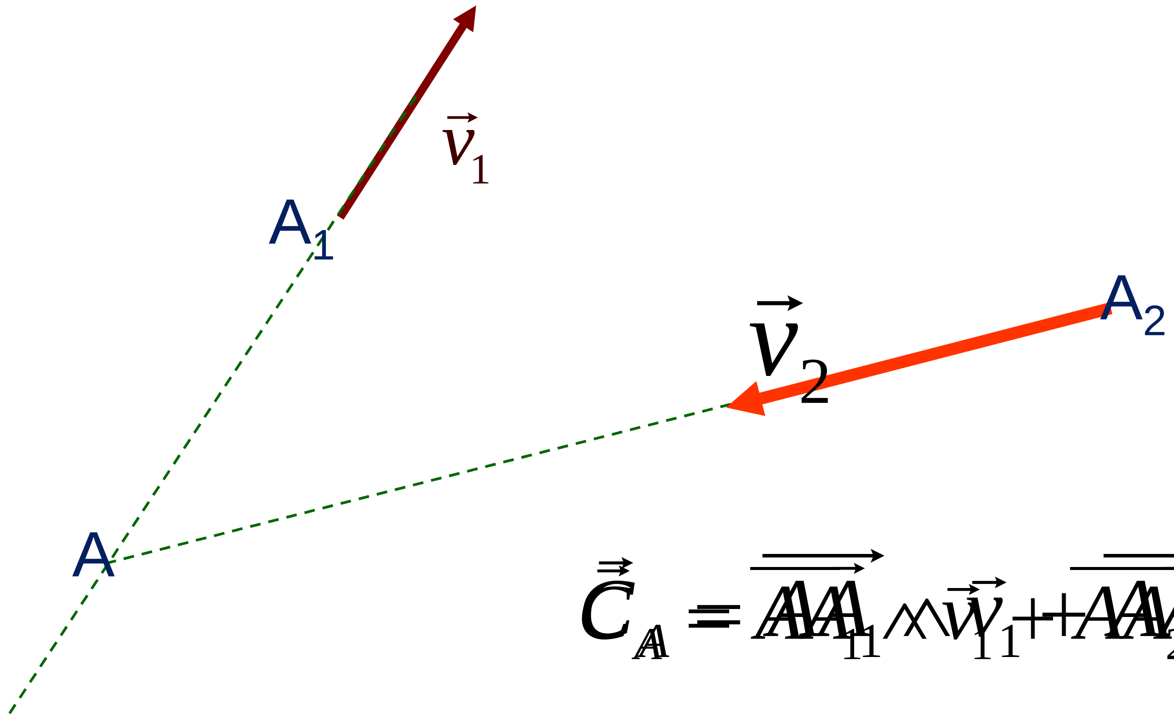
Sistemas de vectores deslizantes concurrentes

Sistema de vectores deslizantes cuyas líneas de acción pasa por un punto denominado punto de concurrencia



Sistemas de vectores deslizantes concurrentes

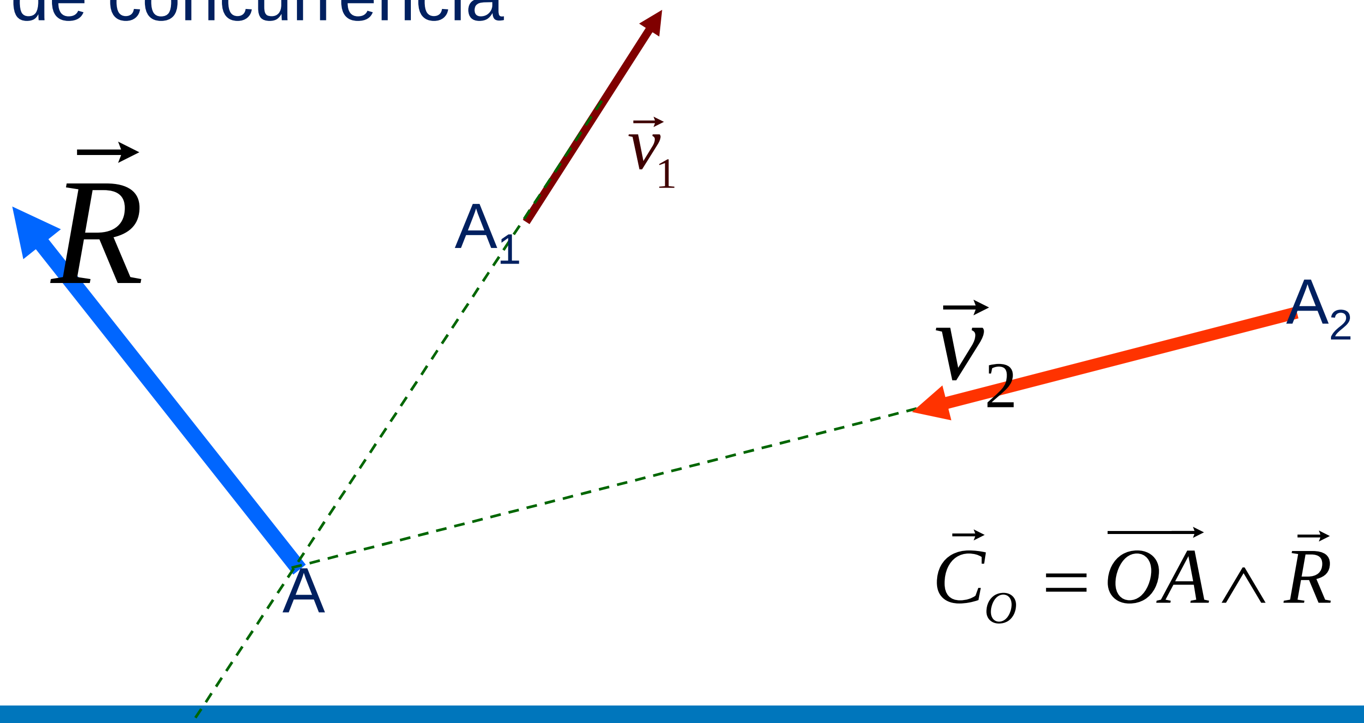
El momento resultante respecto al punto de concurrencia es nulo, por tanto el punto de concurrencia pertenece al eje central



$$\vec{C}_A = \overrightarrow{AA_1}\wedge\vec{v}_1 + \overrightarrow{AA_2}\wedge\vec{v}_2 = \vec{0}$$

Teorema de Varignon

El momento resultante de un sistema de vectores deslizantes concurrente, respecto a un punto cualquiera del espacio, es igual al momento respecto a dicho punto del momento resultante cuando ésta está aplicada en el punto de concurrencia



$$\vec{C}_O = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{R}$$

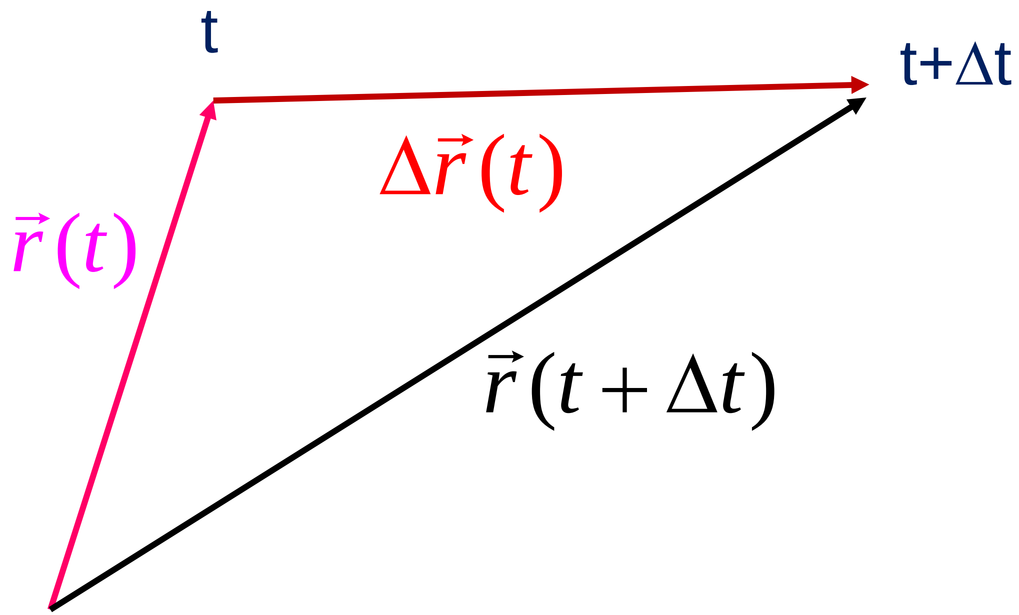
Derivada de una función vectorial

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

$$\vec{r}(t+\Delta t) = x(t+\Delta t)\vec{i} + y(t+\Delta t)\vec{j} + z(t+\Delta t)\vec{k}$$

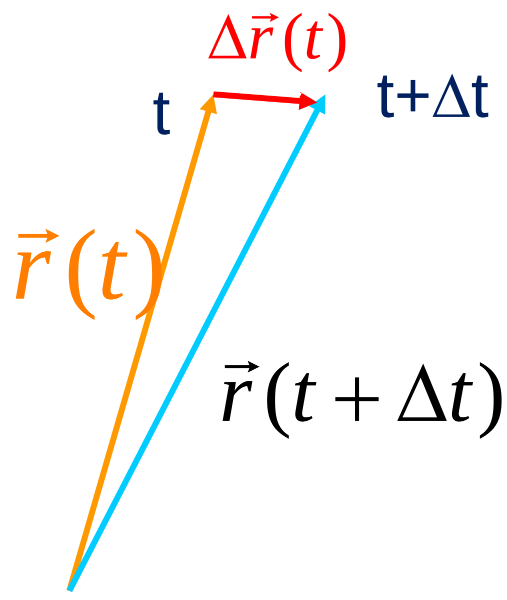
$$\Delta\vec{r}(t) = \left[x(t+\Delta t) - x(t)\right]\vec{i} + \left[y(t+\Delta t) - y(t)\right]\vec{j} + \left[z(t+\Delta t) - z(t)\right]\vec{k} =$$

$$= \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}$$



Derivada de una función vectorial

$$\Delta\vec{r}(t) = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}$$



En el límite

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Tiene la dirección de la tangente