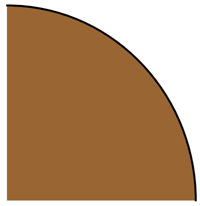
Centro de gravedad de un cuarto de círculo de masa M y radio R



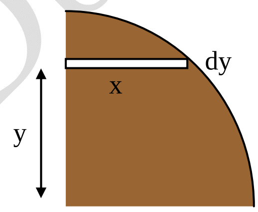
El área del semicírculo es $A = \frac{1}{4}\pi R^2$ y su masa $M = \frac{1}{4}\sigma\pi R^2$.

Consideramos que el círculo está contenido en el plano XY.

1º Método. Integración

Como el semicírculo tiene un eje de simetría, las coordenadas *x* e *y* del centro de gravedad del cuarto de círculo son iguales, por lo que sólo es necesario calcular una de ellas $y_G = \frac{1}{M}\iint_A y\,dm$.

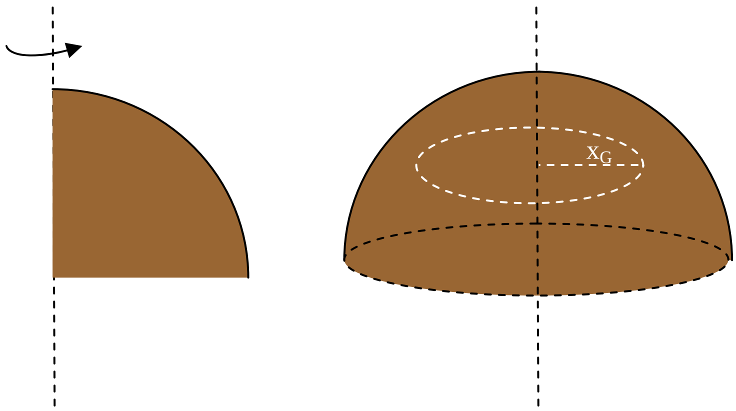
La masa del elemento diferencial de área, se ha seleccionado a una distancia *y* que varía entre *0* y *R*, corresponde a un rectángulo de base *x* y altura *dy* por lo que $dm = \sigma x dy$; además y puede expresarse en función del ángulo *φ*, el cual para el cuarto de círculo varía entre 0 y π/2.



$$x_G = y_G = \frac{1}{M}\iint_A y\,dm = \frac{1}{M}\iint_A y\sigma x dy = \frac{\sigma}{M}\int_0^{\frac{\pi}{2}} R sen\varphi R\cos\varphi R\cos\varphi d\varphi$$

$$x_G = y_G = \frac{\sigma R^3}{M}\left(-\frac{1}{3}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\cos^3\varphi = -\frac{\sigma R^3}{3\left(\frac{\sigma\pi R^2}{4}\right)}\left[-\cos^3\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4R}{3\pi}$$

2º Método. Aplicación del teorema de Guldin Cuando el cuarto de círculo de la figura gira en torno a un eje vertical, engendra una semiesfera de volumen $V = \frac{2}{3}\pi R^3$ mientras que el centro de gravedad describe una circunferencia de longitud $L_{circunferencia} = 2\pi x_G$ de forma que



$\frac{2}{3}\pi R^3 = (2\pi y_G)\left(\frac{\pi R^2}{4}\right)$ de forma que la coordenada *y* del centro de gravedad es $y_G = \frac{4R}{3\pi}$