Centro de gravedad de un semicírculo de masa M y radio R

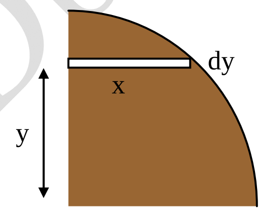
El área del semicírculo es $A = \frac{1}{2}\pi R^2$ y su masa $M = \frac{1}{2}\sigma\pi R^2$. Consideramos que el círculo está contenido en el plano XY.

1º Método. Integración

Como el semicírculo tiene un eje de simetría, el centro de gravedad del semicírculo está sobre dicho eje, las coordenadas *x* e *y* son iguales por lo que sólo es necesario calcular la coordenada *y:*

$$y_G = \frac{1}{M}\iint_A y\,dm\,.$$

Debido a la simetría, cada producto *ydm* existe a ambos lados del eje de simetría, por lo que la integral extendida al área *A* del semicírculo puede considerarse como 2 veces la integral extendida al área del cuarto de circulo, en el que *y* varía entre *0* y *R*; además *y* puede expresarse en función del ángulo *φ*, el cual para el cuarto de círculo varía entre *0* y *π/2*. A una distancia *y* del eje horizontal se considera un elemento diferencial de masa $dm = \sigma x dy$, por lo que



$$y_G = \frac{1}{M}\iint_A y\,dm = \frac{2}{M}\iint_{A/2} y\sigma x dy = \frac{2\sigma}{M}\int_0^{\frac{\pi}{2}} R sen\varphi R\cos\varphi R\cos\varphi d\varphi$$

$$y_G = \frac{2\sigma R^3}{M}\left(-\frac{1}{3}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\cos^3\varphi = -\frac{2\sigma R^3}{3\left(\frac{\sigma\pi R^2}{2}\right)}\left[-\cos^3\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4R}{3\pi}$$

2º Método. Aplicación del teorema de Guldin

Cuando el semicírculo de la figura gira en torno a un eje horizontal, engendra una esfera de volumen $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ mientras que el centro de gravedad describe una circunferencia de longitud $L_{circunferencia} = 2\pi y_G$ de forma que $\frac{4}{3}\pi R^3 = (2\pi y_G)\left(\frac{\pi R^2}{2}\right)$ de forma que la coordenada y del centro de gravedad es $y_G = \frac{4R}{3\pi}$