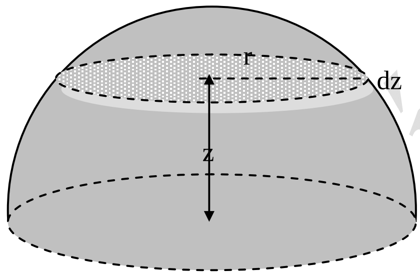
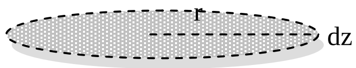
Centro de gravedad de una semiesfera de radio R y masa M

La semiesfera de radio R tiene una masa $M = \rho \frac{2}{3} \pi R^3$ y su centro de gravedad debido a la simetría, está sobre el eje OZ, siendo la coordenada z



$$z_G = \frac{1}{M} \iiint_V z dm$$

Para ello consideramos un elemento diferencial de volumen a una distancia z, cuya masa es $dm = \rho \pi r^2 dz$ ya que dicho volumen corresponde al de un cilindro de radio r y altura dz; por tanto



$z_G = \frac{1}{M} \iiint_V z \rho \pi r^2 dz$. Cuando el elemento diferencial de volumen se elige a una distancia z muy pequeña, el radio del cilindro es grande y viceversa, verificándose la relación $r^2 + z^2 = R^2$ por lo que la coordenada solicitada es

$$z_G = \frac{1}{M} \iiint_V z \rho \pi r^2 dz = \frac{\rho \pi}{M} \int_0^R z(R^2 - z^2) dz = \frac{\rho \pi}{M} \left[\frac{R^2 z^2}{2} - \frac{z^4}{4} \right]_0^R = \frac{\rho \pi}{\left(\frac{2}{3} \rho \pi R^3 \right)} \frac{R^4}{4} = \frac{3R}{8}$$