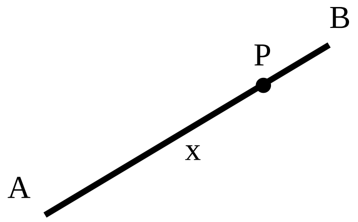
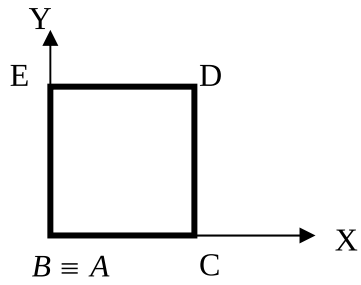
Una barra no homogénea tiene una longitud de 12 cm; un punto genérico P situado a una distancia x del extremo A tiene una densidad lineal de $2x^2 \ (g/cm)$. Calcular

a) centro de gravedad de la barra

b) Si se hacen dobleces de manera que forme el contorno de un cuadrado, calcular el centro de gravedad de dicha figura.





Resolución

a) La masa total del sistema es $M = \int dm = \int \lambda dx = \int_0^{12} 2x^2 dx = \frac{2}{3}x^3\Big]_0^{12} = \frac{2\cdot 12^3}{3} g = 1152 g$

La coordenada del centro de gravedad es $x_G = \frac{1}{M}\int x dm = \frac{1}{M}\int_0^{12} x\cdot 2x^2 dx = \frac{1}{2M}x^4\Big]_0^{12} = 9 cm$

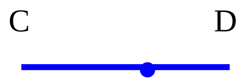
c) Dividimos la varilla en 4 partes de igual longitud. Cada parte no tiene la misma masa, pues ésta es función de x; y la posición del centro de gravedad de cada tramo también es distinta.

El tramo A-C, tiene una masa $M_1 = \int dm = \int \lambda dx = \int_0^{3} 2x^2 dx = \frac{2}{3}x^3\Big]_0^{3} = \frac{2\cdot 3^3}{3} g = 18 g$; y la coordenada x del centro de gravedad de esa porción de varilla es

$$(x_G)_{AC} = \frac{1}{M_1}\int x dm = \frac{1}{M_1}\int_0^{3} x\cdot 2x^2 dx = \frac{\frac{x^4}{2}\Big]_0^3}{\frac{2}{3}x^3\Big]_0^3} = \frac{3x}{4}\Big]_3^3 = \frac{9}{4} cm$$

El tramo C-D, comprendido entre el punto de x=3 cm y el de x=6 cm, tiene una masa $M_2 = \int dm = \int \lambda dx = \int_3^{6} 2x^2 dx = \frac{2}{3}x^3\Big]_3^{6} = \frac{2\cdot(6^3-3^3)}{3} g = 126 g$; la coordenada y del centro de gravedad de esa porción de varilla es

$$\left(x_G\right)_{CD} = \frac{1}{M_{21}}\int x dm = \frac{1}{M_2}\int_3^3 x\cdot 2x^2 dx = \frac{\left.\frac{x^4}{2}\right]_3^6}{\left.\frac{2}{3}x^3\right]_3^6} = \left.\frac{3x}{4}\right]_3^6 = \frac{9}{4}cm$$



El punto se encuentra a 9/4 cm del punto C, y cuando la varilla se dobla, este punto pasa a ocupar en el nuevo sistema de referencia la posición (3, 9/4)

El tramo D-E, comprendido entre el punto de x=6 cm y el de x=9 cm, tiene una masa $M_3 = \int dm = \int \lambda dx = \int_6^9 2x^2 dx = \left.\frac{2}{3}x^3\right]_6^9 = \frac{2\cdot(9^3-6^3)}{3}g = 342g$; la coordenada y del centro de gravedad de esa porción de varilla es

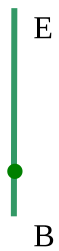
$$\left(x_G\right)_{DE} = \frac{1}{M_3}\int x dm = \frac{1}{M_3}\int_6^9 x\cdot 2x^2 dx = \frac{\left.\frac{x^4}{2}\right]_6^9}{\left.\frac{2}{3}x^3\right]_6^9} = \left.\frac{3x}{4}\right]_6^9 = \frac{9}{4}cm$$

Este punto se encuentra a 9/4 cm de D, por tanto cuando la varilla se dobla, este punto pasa a ocupar en el nuevo sistema de referencia la posición (3/4, 3).

El tramo E-B, comprendido entre el punto de x=9 cm y el de x=12 cm, tiene una masa $M_4 = \int dm = \int \lambda dx = \int_9^{12} 2x^2 dx = \left.\frac{2}{3}x^3\right]_9^{12} = \frac{2\cdot(12^3-9^3)}{3}g = 666g$; la coordenada y del centro de gravedad de esa porción de varilla es

$$\left(x_G\right)_{EB} = \frac{1}{M_4}\int x dm = \frac{1}{M_4}\int_9^{12} x\cdot 2x^2 dx = \frac{\left.\frac{x^4}{2}\right]_9^{12}}{\left.\frac{2}{3}x^3\right]_9^{12}} = \left.\frac{3x}{4}\right]_9^{12} = \frac{9}{4}cm$$

El centro de gravedad de este tramo se encuentra a una distancia 9/4 cm del punto E, luego cuando se dobla la varilla pasa a ocupar en el sistema de referencia las coordenadas (0,3/4).



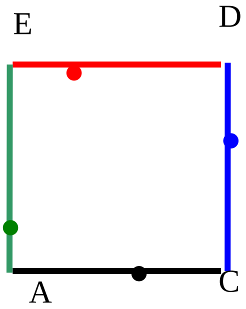
Tenemos un sistema discreto, cuyas masas y coordenadas son

$M_1 = 18g \quad \left(\frac{9}{4}, 0\right)$

$M_2 = 126g \quad \left(3, \frac{9}{4}\right)$

$M_3 = 342g \quad \left(\frac{3}{4}, 3\right)$

$M_4 = 666g \quad \left(0, \frac{3}{4}\right)$



por tanto el centro de gravedad es

$$x_G = \frac{18 \cdot \frac{9}{4} + 126 \cdot 3 + 342 \cdot \frac{3}{4} + 666 \cdot 0}{1152} = \frac{40{,}5 + 378 + 256{,}5}{1152} = \frac{675}{1152} cm$$

$$y_G = \frac{18 \cdot 0 + 126 \cdot \frac{9}{4} + 342 \cdot 3 + 666 \cdot \frac{3}{4}}{1152} = \frac{283{,}5 + 1026 + 499{,}5}{1152} = \frac{1809}{1152} cm$$