

La posición de una partícula cambia con el tiempo, siendo sus coordenadas

$$x = t$$

$$y = 4t^2$$

$$z = -2t$$

Escribir a) El vector de posición, el vector velocidad y vector aceleración en coordenadas cartesianas

b) Componentes intrínsecas de la aceleración, así como la ecuación vectorial de la aceleración en dichas coordenadas

c) Ecuación de la curva hodógrafa

Resolución

a) El vector de posición es

$$\vec{r} = t\vec{i} + 4t^2\vec{j} - 2t\vec{k}$$

Las componentes de la velocidad son

$$x' = 1$$

$$y' = 8t$$

$$z' = -2$$

De donde el vector velocidad es

$$\vec{v} = \vec{i} + 8t\vec{j} - 2\vec{k}$$

El módulo de la velocidad es $|\vec{v}| = \sqrt{1 + 64t^2 + 4} = \sqrt{5 + 64t^2}$

Las componentes de la aceleración son

$$x'' = 0$$

$$y'' = 8$$

$$z'' = 0$$

El vector aceleración es

$$\vec{a} = 8\vec{j}$$

El módulo de la aceleración es $|\vec{a}| = 8$

b) La componente tangencial de la aceleración es igual a la derivada respecto al tiempo del módulo de la velocidad, por tanto

$$a_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{d\sqrt{5 + 64t^2}}{dt} = \frac{128t}{2\sqrt{5 + 64t^2}} = \frac{64t}{\sqrt{5 + 64t^2}}$$

La componente normal de la aceleración es

$$a_n = \frac{|\vec{v}|^2}{\rho}$$

Por otra parte, como las componentes tangencial y normal son perpendiculares se verifica

$$a^2 = a_t^2 + a_n^2$$

Sustituyendo valores se tiene

$$64 = \frac{64^2 t^2}{5 + 64t^2} + a_n^2, \text{ de donde se deduce}$$

$$64 - \frac{64^2 t^2}{5 + 64t^2} = a_n^2 = \frac{320 + 64^2 t^2 - 64^2 t^2}{5 + 64t^2} = \frac{320}{5 + 64t^2}$$

Y la aceleración normal es

$$a_n = \sqrt{\frac{320}{5 + 64t^2}}$$

Por tanto la aceleración, expresada en función de las componentes intrínsecas es

$$\vec{a} = \frac{64t}{\sqrt{5 + 64t^2}} \vec{u}_t + \frac{\sqrt{320}}{\sqrt{5 + 64t^2}} \vec{u}_n$$

b) La hodógrafa es la curva que describe el extremo del vector velocidad, por tanto la ecuación de dicha curva en función del parámetro t (tiempo) es

$$x' = x_h = 1$$

$$y' = y_h = 8t$$

$$z' = z_h = -2$$

Dpto. Física y Mecánica. E.T.S.I. Agrónomos