Una partícula realiza una trayectoria circular siendo sus coordenadas función del tiempo

$x = 2\cos(2t)$

$y = 2sen(2t)$

Escribir a) El vector de posición, el vector velocidad y vector aceleración en coordenadas cartesianas

b) Componentes intrínsecas de la aceleración, así como la ecuación vectorial de la aceleración en dichas coordenadas

Las coordenadas están expresadas en unidades del sistema internacional

Resolución

De las ecuaciones anteriores se deduce que el radio de la circunferencia es 2m, ya que la ecuación de la circunferencia es de la forma

$x = R\cos\varphi$

$y = Rsen\varphi$

El ángulo es función del tiempo siendo $\varphi = 2t \ rad$

Derivando el ángulo respecto al tiempo se obtiene la velocidad angular (rad/s), esto es

$$\omega = \frac{d}{dt}(2t) = 2 \ \ (rad/s)$$

y la derivada de la velocidad angular proporciona la aceleración angular (rad/s^2). Puede observarse que, como la velocidad angular es constante, la aceleración angular es nula. La partícula describe un movimiento circular uniforme. Aunque el movimiento es uniforme, existe aceleración normal, aunque no existe aceleración tangencial

$$\alpha = \frac{d}{dt}(2) = 0 \ \ (rad/s^2)$$

$$\vec{r} = 2\cos 2t\vec{i} + 2sen2t\vec{j} \ \ (m)$$

Derivando las componentes del vector de posición se obtienen las componentes de la velocidad son

$x' = 2\cdot(-2)sen(2t) = -4sen(2t)$

$y' = 2\cdot(2)\cos(2t) = 4\cos(2t)$

De donde el vector velocidad es

$$\vec{v} = -4sen2t\vec{i} + 4\cos 2t\vec{j} \ \ (m/s)$$

El módulo de la velocidad es $|\vec{v}| = \sqrt{(4sen2t)^2 + (4\cos 2t)^2} = 4 \ \ m/s$

Se puede observar que durante toda la trayectoria el módulo de la velocidad permanece constante

Las componentes de la aceleración son

$x'' = -4\cdot 2\cos(2t) = -8\cos 2t$

$y'' = 4\cdot 2sen(2t) = 8sen2t$

El vector aceleración es

$\vec{a} = [-8\cos 2t]\vec{i} + [8 sen 2t]\vec{j} \quad m/s^2$

b) La componente tangencial de la aceleración es igual a la derivada respecto al tiempo del módulo de la velocidad y éste es constante, por tanto

$$a_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{d(4)}{dt} = 0$$

Por otra parte, el módulo de la aceleración tangencial se puede expresar como el producto de la aceleración angular por el radio, por tanto como se ha visto anteriormente que la aceleración angular es nula se tiene

$$a_t = \alpha \cdot r = 0$$

La componente normal de la aceleración es

$$a_n = \frac{|\vec{v}|^2}{\rho} = \frac{(4)^2}{2} = 8 \quad m/s^2$$

También se puede expresar como el producto del radio por el cuadrado de la velocidad angular, esto es

$$a_n = (2 rad/s)^2 \cdot 2m = 8 \ m/s^2$$

Por tanto la aceleración, expresada en función de las componentes intrínsecas es

$$\vec{a} = 8\vec{u}_n$$

Se puede observar que la aceleración sólo tiene componente normal, es decir está dirigida hacia el centro de curvatura, en la dirección del radio.