La posición de una partícula cambia con el tiempo, siendo sus coordenadas

$$x = 4t$$

$$y = \frac{4}{3}t^3$$

$$z = 4t^2$$

Escribir a) El vector de posición, el vector velocidad y vector aceleración en coordenadas cartesiana

b) Componentes intrínsecas de la aceleración, así como la ecuación vectorial de la aceleración en dichas coordenadas

c) Ley horaria del movimiento

Resolución

a) El vector de posición es

$$\vec{r} = 4t\vec{i} + \frac{4}{3}t^3\vec{j} + 4t^2\vec{k}$$

Las componentes de la velocidad son

$$x' = 4$$

$$y' = 4t^2$$

$$z' = 8t$$

De donde el vector velocidad es

$$\vec{v} = 4\vec{i} + 4t^2\vec{j} + 8t\vec{k}$$

El módulo de la velocidad es $|\vec{v}| = \sqrt{16 + 16t^4 + 64t^2} = \sqrt{(4+4t^2)^2} = 4 + 4t^2$

Las componentes de la aceleración son

$$x'' = 0$$

$$y' = 8t$$

$$z' = 8$$

El vector aceleración es

$$\vec{a} = 8t\vec{j} + 8\vec{k}$$

El módulo de la aceleración es $|\vec{a}| = \sqrt{64 + 64t^2}$

b) La componente tangencial de la aceleración es igual a la derivada respecto al tiempo del módulo de la velocidad, por tanto

$$a_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{d(4+4t^2)}{dt} = 8t$$

La componente normal de la aceleración es

$$a_n = \frac{|\vec{v}|^2}{\rho}$$

Por otra parte, como las componentes tangencial y normal son perpendiculares se verifica

$a^2 = a_t^2 + a_n^2$

Sustituyendo valore se tiene

$64 + 64t^2 = 64t^2 + a_n^2$, de donde se deduce que la aceleración normal es

$a_n = 8$

Por tanto la aceleración, expresada en función de las componentes intrínsecas es

$\vec{a} = 8t\ \vec{u}_t + 8\vec{u}_n$

c) La ley horaria del movimiento es la relación existente entre la coordenada curvilínea s y el tiempo

Como $|\vec{v}| = \dfrac{ds}{dt}$ se deduce que $ds = |\vec{v}|\,dt = (4 + 4t^2)dt$ cuya integración proporciona

$s = 4t + \dfrac{4}{3}t^3$