Una partícula realiza una trayectoria circular siendo sus coordenadas función del tiempo

$$x = 4\cos(3t^2)$$
$$y = 4sen(3t^2)$$

Escribir a) El vector de posición, el vector velocidad y vector aceleración en coordenadas cartesianas

b) Componentes intrínsecas de la aceleración, así como la ecuación vectorial de la aceleración en dichas coordenadas

Las coordenadas están expresadas en unidades del sistema internacional

Resolución

De las ecuaciones anteriores se deduce que el radio de la circunferencia es 4, ya que la ecuación de la circunferencia es de la forma

$$x = R\cos\varphi$$
$$y = Rsen\varphi$$

El ángulo es función del tiempo siendo $\varphi = 3t^2$

Las unidades del ángulo son radianes

Derivando el ángulo respecto al tiempo se obtiene la velocidad angular (rad/s), esto es

$$\omega = \frac{d}{dt}(3t^2) = 6t \quad (rad/s)$$

y la derivada de la velocidad angular proporciona la aceleración angular (rad/s^2)

$$\alpha = \frac{d}{dt}(6t) = 6 \quad (rad/s^2)$$

$$\vec{r} = 4\cos 3t^2\vec{i} + 4sen3t^2\vec{j}$$

Las unidades del vector de posición son m

Derivando las componentes del vector de posición se obtienen las componentes de la velocidad son

$$x' = 4\cdot(-6t)sen(3t^2) = -24tsen(3t^2)$$
$$y' = 4\cdot(6t)\cos\left(3t^2\right) = 24t\cos(3t^2)$$

De donde el vector velocidad es

$$\vec{v} = -24sen3t^2\vec{i} + 24\cos 3t^2\vec{j}$$

El módulo de la velocidad es $|\vec{v}| = \sqrt{(24tsen3t^2)^2 + (24t\cos 3t^2)^2} = 24t$

Las unidades de la velocidad son m/s

Las componentes de la aceleración son

$$x'' = -24sen(3t^2) - 24t(6t)\cos(3t^2)$$
$$y'' = 24\cos(3t^2) + 24t(-6t)sen(3t^2)$$

El vector aceleración es

$$\vec{a} = \left[-24sen(3t^2) - 144t^2 \cos(3t^2)\right]\vec{i} + \left[24\cos(3t^2) - 144t^2 sen(3t^2)\right]\vec{j}$$

Las unidades de la aceleración son m/s^2

b) La componente tangencial de la aceleración es igual a la derivada respecto al tiempo del módulo de la velocidad, por tanto

$$a_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{d(24t)}{dt} = 24$$

Por otra parte, el módulo de la aceleración tangencial se puede expresar como el producto de la aceleración angular por el radio, por tanto

$$a_t = 6rad/s \cdot 4m = 24m/s^2$$

La componente normal de la aceleración es

$$a_n = \frac{|\vec{v}|^2}{\rho} = \frac{(24t)^2}{4} = 144t^2$$

También se puede expresar como el producto del radio por el cuadrado de la velocidad angular, esto es

$$a_n = (6t)^2 \cdot 4 = 144t^2 \quad m/s^2$$

Por tanto la aceleración, expresada en función de las componentes intrínsecas es

$$\vec{a} = 24\,\vec{u}_t + 144t^2\vec{u}_n$$