En un instante determinado, las velocidades de los puntos O(0,0,0), A(0,1,0) y B(1,0,0) de un sólido que está sometido a varias rotaciones son respectivamente:

$$\vec{v}_O = \vec{i} + \vec{j} \qquad \vec{v}_A = -\vec{i} + \vec{j} \qquad \vec{v}_B = \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$$

Determinar:

a) La rotación resultante $\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \vec{\omega}_z \vec{k}$

b) Velocidad de mínimo deslizamiento ($\vec{v}_{\min}$).

c) Ecuación del E.I.R.D.

d) Hacer el movimiento equivalente a un movimiento helicoidal.

Resolución

a) Conociendo la velocidad de un punto se puede expresar la velocidad de otro punto en función de la velocidad del primero y de la rotación resultante. Por tanto, como conocemos la velocidad de 3 puntos podemos expresar las velocidades de dos de ellos en función de la velocidad del otro y de la rotación resultante, lo que permite conocer las componentes de la rotación

$$\vec{v}_O = \vec{v}_A + \overrightarrow{OA} \wedge \vec{\omega}$$

$$\vec{v}_O = \vec{v}_B + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{\omega}$$

$$\vec{i} + \vec{j} = -\vec{i} + \vec{j} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix}$$ de donde ω_z=2, y ω_x=0

$$\vec{i} + \vec{j} = \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix}$$ de donde ω_y=2

$$\vec{\omega} = 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

b) El módulo de la velocidad de mínimo deslizamiento es el producto escalar de la rotación resultante por la velocidad de un punto cualquiera, esto es $v_{\min} = 2$; para expresarlo vectorialmente se multiplica el módulo por un vector unitario en la dirección de la rotación

$$\vec{v}_{\min} = 2\frac{2\vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{8}} = \frac{2\vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}(\vec{j} + \vec{k})$$

c) Para escribir la ecuación del eje instantáneo de rotación y deslizamiento, en forma continua, se necesita el vector director de la recta (que es el de la rotación resultante) y el punto del eje, que se obtiene mediante la expresión

$$O\vec{E} = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v}_0}{\omega^2} = x_E \vec{i} + y_E \vec{j} + z_E \vec{k}$$ de donde $\overrightarrow{OE} = \frac{1}{8}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}\vec{i} + \frac{1}{4}\vec{j} - \frac{1}{4}\vec{k}$, de donde la ecuación es $\frac{x + \frac{1}{4}}{0} = \frac{y - \frac{1}{4}}{2} = \frac{z + \frac{1}{1}}{2}$

d) Para reducir el movimiento a un movimiento helicoidal, recordamos que este movimiento es la composición de una rotación y una traslación paralela al eje de la rotación; nosotros conocemos una traslación que es paralela al eje de rotación, que es la velocidad de mínimo deslizamiento, por tanto el movimiento se reduce a la rotación $\vec{\omega} = 2\vec{j} + 2\vec{k}$ y a una traslación con la velocidad $\vec{v}_{\min} = \sqrt{2}(\vec{j} + \vec{k})$