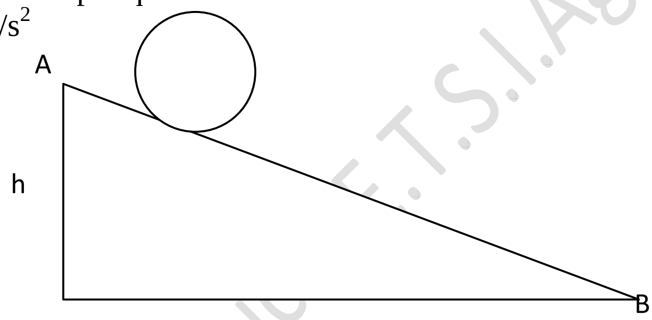
1. Un disco homogéneo de masa M= 8 kg y radio R=50 cm se encuentra en el plano XOY, y su centro está situado en O.

a) Calcular por integración el momento de inercia respecto al punto O, expresando el resultado en función de M y R y dando el valor numérico.
b) Calcular, aplicando el teorema de Steiner o alguna propiedad, los momentos de inercia respecto a los ejes OX, OY, OZ y respecto a un punto P del borde del disco. Expresar el resultado en función de M y R y dar el valor numérico

2. El disco anterior cae rodando sin velocidad inicial desde le punto más alto (A) de una rampa de longitud AB=5m y altura h=3m. Cuando llegue al punto B calcular

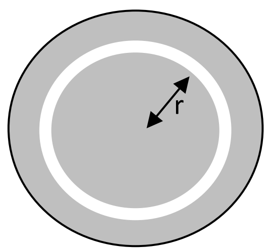
a) Aceleración del centro de gravedad
b) Fuerza de rozamiento entre rampa y disco
c) Energía cinética del disco
d) Trabajo realizado por las fuerzas que actúan, indicando si se conserva la energía mecánica explicando por qué.

Considerar $g=10\ m/s^2$



Resolución

1. a) Para calcular el momento de inercia del disco respecto a su centro consideramos un elemento diferencial de masa (corona circular de radio r y espesor dr) situado a una distancia r del centro, por lo que $I_O = \iint r^2 \sigma 2\pi r dr = \sigma 2\pi \int_0^R r^3 dr = \left(\sigma\pi R^2\right)\frac{R^2}{2} = \frac{MR^2}{2}$



Sustituyendo los valores numéricos $I_O = \frac{(8kg)(0{,}5m)^2}{2} = 1\ kg{\cdot}m^2$

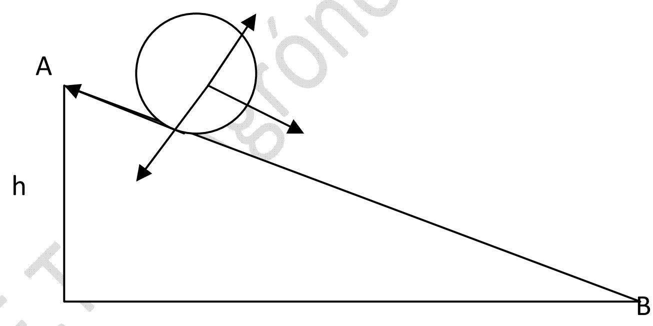
b) Si la figura está situada en el plano XOY, el momento de inercia respecto al eje perpendicular que pasa por el origen (eje OZ) es el mismo que el momento de inercia respecto a O, esto es $I_{OZ} = \frac{MR^2}{2} = 1\ kg{\cdot}m^2$.

Por simetría, los momentos de inercia respecto a los ejes OX y OY son iguales. Aplicando la propiedad $I_O = \frac{1}{2}(I_{OX} + I_{OY} + I_{OZ}) = \frac{1}{2}(2I_{OX} + I_O)$. De donde

$$I_{OX} = I_{OY} = \frac{MR^2}{4} = 0{,}5 \ \ kg{\cdot}m^2$$

El momento de inercia respecto a un punto P de la periferia es, por aplicación del teorema de Steiner $I_P = I_O + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2 = 1{,}5 \ \ kg{\cdot}m^2$

2. Las fuerzas que actúan son el peso P (que se descompone en una componente tangencial y otra normal), la fuerza normal y la fuerza de rozamiento.



El balance de fuerzas en el sentido del movimiento produce $Mgsen\varphi - f_r = Ma$

Se conoce que h=3 y AB=%, de donde el senφ=3/5

Por otra parte, aplicando la ecuación de la dinámica de rotación del disco $I_{GZ}\varphi'' = Rf_r = I_{GZ}\frac{a}{R}$ de donde la fuerza de rozamiento puede expresarse en función de la aceleración del centro de gravedad como

$$f_r = I_{GZ}\frac{a}{R^2} = \frac{1}{2}MR^2\frac{a}{R^2} = M\frac{a}{2}$$

Sustituyendo este valor de la fuerza de rozamiento en la expresión anterior se tiene

$Mg\frac{3}{5} - \frac{1}{2}Ma = Ma$, por tanto $a = 4m/s^2$

b) $f_r = M\frac{a}{2} = 8kg{\cdot}2m/s^2 = 16\,N$

c) La energía cinética del disco es, considerando que el rueda en torno a un eje perpendicular a él, que pasa por el punto de contacto $E_C = \frac{1}{2}I_{AZ}\varphi'^2 = \frac{1}{2}\frac{3}{2}MR^2\varphi'^2 = \frac{3}{4}Mv_G^2$.

La velocidad del centro de gravedad, cuando llega al punto B es $v_G = \sqrt{2as} = \sqrt{2{\cdot}4m/s{\cdot}5m} = \sqrt{40} \ \ m/s$ por lo que la energía cinética en B es

$$E_C = \frac{3}{4}8kg{\cdot}40\frac{m^2}{s^2} = 240\,J$$

d)El trabajo realizado es debido por una parte a la componente del peso paralela a la superficie (mgsenφ) y por otra parte a la fuerza de rozamiento; la primera es conservativa y la segunda no, pero al ser una fuerza instantánea no produce disipación de energía y en consecuencia se va a conservar la energía mecánica