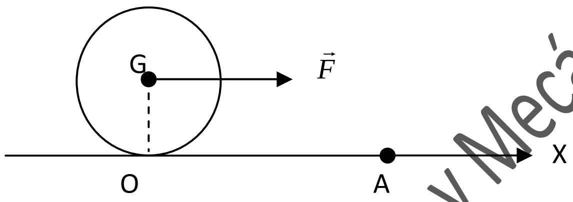
A.Una barra homogénea OA de longitud L=3m y densidad lineal que aumenta de un extremo O al otro A según la ley $\lambda = 4x(kg/m)$

Calcular por integración:

a) La masa M de la barra en función de L y en kg.
b) Su coordenada del centro de gravedad OG ó x_G en función de L y su valor numérico en m.
c) Su momento de inercia respecto a un eje perpendicular a la barra por su extremo O y respecto a un eje paralelo que pase por G en función de M y L y su valor en $kg.m^2$.

B.Un disco homogéneo de masa M=6 kg y radio R <u>rueda</u> partiendo de O sin velocidad inicial, sobre una superficie horizontal bajo la acción de una fuerza $\vec{F}$ constante de 18N paralela a dicha superficie y aplicada a su centro de gravedad G.

Cuando llega a A (siendo OA=3m), calcular:



a) La aceleración de su centro de gravedad, $\vec{a}_G$.

b) La fuerza de rozamiento entre el disco y la superficie, $\vec{F}_r$.

d) La velocidad de su centro de gravedad, $\vec{v}_G$, y el tiempo t empleado.
e) La energía cinética del disco y los trabajos realizados por las fuerzas $\vec{F}$ y $\vec{F}_r$

Resolución

A. a) La masa de la barra es $M = \int_L dm = \int_L \lambda dx = \int_0^L 4x dx = 2L^2 = 18kg$

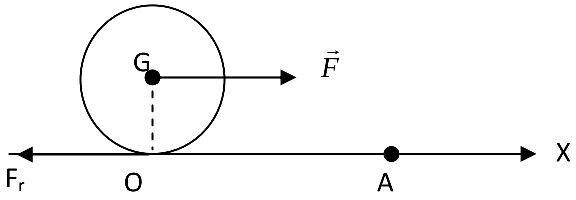
b) La coordenada x del centro de gravedad es $x_G = \frac{1}{M}\int_L x dm = \frac{1}{2L^2}\int_0^L 4x^2 dx = \frac{1}{2L^2}\left[\frac{4L^3}{3}\right] = \frac{2}{3}L = 2m$

c) El momento de inercia respecto al extremo O es

$$I_O = \int_L x^2 dm = \int_L x^2 \lambda dx = \int_0^L 4x^3 dx = L^4 = \frac{ML^2}{2} = 81\ kg{\cdot}m^2$$

Y respecto al centro de gravedad es $I_G = I_O - Mx_G^2 = \frac{ML^2}{2} - \frac{4ML^2}{9} = \frac{ML^2}{18} = 9\ kg{\cdot}m^2$

B.a) Como el disco rueda, aplicamos la ecuación fundamental de la dinámica de rotación $I_{OZ}\varphi'' = R{\cdot}F$



El momento de inercia del disco respecto a un eje que pasa por O, se calcula aplicando el teorema de Steiner $I_{OZ} = I_{GZ} + MR^2 = \frac{MR^2}{2} + MR^2 = \frac{3MR^2}{2}$, de donde $\frac{3}{2}MR^2\varphi'' = R{\cdot}F$

Por tanto $F = \frac{3}{2}Ma$ y la aceleración es $a = \frac{2F}{3M} = \frac{2{\cdot}18N}{3{\cdot}6kg} = 2m/s^2$

b) Por otro lado $F - F_r = Ma$, la fuerza de rozamiento es $F_r = 18N - 6kg{\cdot}2m/s^2 = 6N$

c) Como la aceleración del centro de gravedad es constante, $a = 2m/s^2$, y $v = \sqrt{2as} = \sqrt{2{\cdot}2m/s^2{\cdot}3m} = 2\sqrt{3}\ \ m/s$

Esta velocidad tarda en alcanzarse un tiempo t, tal que $v = at$, de donde $t = \sqrt{3}s$

d) La energía cinética del disco es $E_C = \frac{1}{2}I_{OZ}\varphi'^2 = \frac{1}{2}\frac{3}{2}MR^2\varphi'^2 = \frac{3}{4}Mv^2 = \frac{3}{4}6kg{\cdot}12\frac{m^2}{s^2} = 54J$

El trabajo realizado por la fuerza F, en su desplazamiento de O a A es $W = \vec{F}{\cdot}\overrightarrow{OA} = 18{\cdot}3 = 54J$ y el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento es nulo, por ser una fuerza de rozamiento estático.