

Dada una esfera homogénea de radio $R=0,1$ m y centro el origen de coordenadas, calcular

- El momento de inercia respecto a un diámetro de la esfera maciza de peso específico relativo $\gamma_r=0,1$
- La esfera homogénea, considerada maciza, rueda hacia abajo sin deslizamiento por un plano inclinado que forma un ángulo $\varphi=30^\circ$ con la horizontal. Determinar la aceleración del centro de gravedad (considerar $g=10$ m/s²)

Resolución

a) El momento de inercia de la esfera maciza respecto a un diámetro, puede calcularse partiendo del momento de inercia respecto al centro de gravedad, y posterior aplicación de las relaciones entre los momentos de inercia respecto a puntos y ejes

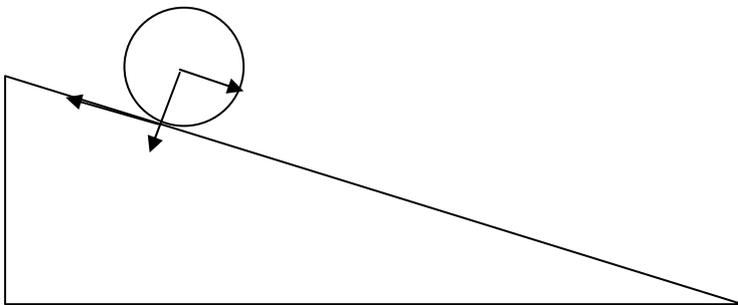
El momento de inercia de la esfera respecto al centro de gravedad es

$$I_G = \iiint r^2 dm = \iiint r^2 (4\sigma\pi r^2 dr) = 4\sigma\pi \int_0^R r^4 dr = \frac{4}{5}\sigma\pi R^5 = \frac{3}{5}MR^2$$

Como el momento de inercia respecto al centro de gravedad es la semisuma de los momentos de inercia respecto a tres ejes perpendiculares entre sí que se corten en el centro de gravedad

(diámetros), y estos son iguales: $I_G = \frac{3}{2}I_{diámetro}$, se tiene que $I_{diámetro} = \frac{2}{5}MR^2$

c) Si la esfera rueda sin deslizar por un plano inclinado un ángulo φ



$$mg\text{sen}\varphi - f_r = ma$$

$$a = R\varphi''$$

Según la ecuación fundamental de la dinámica de rotación “el momento resultante de todas las fuerzas respecto al eje que pasa por el centro es igual al momento de inercia respecto a dicho eje por la aceleración angular”: $Rf_r = I_{GZ}\varphi'' = I_{GZ}\frac{a}{R}$ de donde se despeja $f_r = I_{GZ}\frac{a}{R^2}$

Llevando este valor de la fuerza de rozamiento a la primera expresión se tiene

$$mg\text{sen}\varphi - I_{GZ}\frac{a}{R^2} = ma \text{ de donde } mg\text{sen}\varphi = a\frac{I+mR^2}{R^2} \text{ o bien } a = \frac{mgR^2\text{sen}\varphi}{I+mR^2}$$

El momento de inercia de una esfera respecto a uno de los diámetros es $\frac{2}{5}mR^2$; sustituyendo el valor del momento de inercia en la expresión de la aceleración se tiene

$$a = \frac{25}{7} \text{ m/s}^2$$

$$\text{La fuerza de rozamiento es } f_r = mg\text{sen}30 - ma = m\left(5 - \frac{25}{7}\right) = \frac{10}{7}m$$