Una partícula de masa $m = 3\ kg$ se encuentra en un campo de fuerzas conservativo, siendo su potencial V

$V(x) = 2x^2 \quad J/kg$ para $-1 \le x \le 1$

$V(x) = 2 \quad J/kg$ para $\begin{cases} x < -1 \\ x > 1 \end{cases}$

donde x viene expresado en metros.

a) Calcular la fuerza $\vec{F}(x)$ que actúa sobre la partícula

Para el intervalo $-1 \le x \le 1$ $-1 \le x \le 1$

b) Escribir la ecuación diferencial del movimiento de la partícula indicando el tipo de movimiento que tiene

c) Calcular y representar frente al desplazamiento x:

La energía potencial $U(x)$

La energía mecánica E (x)

La energía cinética $E_c(x)$

Resolución

Dado el potencial $V(x)$, la energía potencial $U(x)$ es $U(x) = mV(x)$, por tanto

$U(x) = 6x^2 \quad J$ para $-1 \le x \le 1$

$U(x) = 6 \quad J$ para $\begin{cases} x < -1 \\ x > 1 \end{cases}$

a) La fuerza es igual al gradiente de energía potencial, cambiada de signo, debido a que está dirigida hacia energías potenciales decrecientes, por tanto

$\vec{F} = -\dfrac{dU}{dx}\vec{i} = -12x\vec{i} \quad N$ en el intervalo $-1 \le x \le 1$ y $\vec{F} = \vec{0}$ en $\begin{cases} x < -1 \\ x > 1 \end{cases}$

b) En el intervalo $-1 \le x \le 1$ la fuerza es $\vec{F} = -12x\vec{i} \quad N$, de donde $mx'' = -12x$ o bien $3x'' + 12x = 0$ que es la ecuación diferencial solicitada; corresponde a un movimiento armónico simple rectilíneo siendo la frecuencia propia $\omega = 2\ rad/s$; se trata de un movimiento periódico cuyo periodo es $T = \dfrac{2\pi}{2} = \pi\ s$

c) La energía potencial es $U(x) = 6x^2 \quad J$, por lo que en los extremos del intervalo la función adquiere el máximo valor de la energía potencial $U(1) = U(-1) = 6\ J$ y el mínimo valor de la energía cinética $E_c(1) = E_c(-1) = 0$. La energía mecánica, suma de las energías cinética y potencial se mantiene constante en todos los puntos del intevalo, de donde $E_m(x) = 6J$.

En cualquier punto del intervalo la energía cinética es $E_c(x) = 6 - 6x^2 \quad J$.

La representación gráfica de estas funciones frente a la posición x es