Una masa puntual de 1 kg está sometida a una fuerza dependiente de la posición de la forma $\vec{F} ? ?x\vec{i} ? 2y\vec{j} ? \vec{k}$ (N). Debido a la acción de esta fuerza, la partícula está sometida a una aceleración, y su velocidad va cambiando con la posición, siendo la velocidad en el punto A(0,1,2) de 4 m/s.

a) Escribir la ecuación diferencial de las líneas de fuerza e integrarla.
b) ¿Existe energía potencial? En caso afirmativo calcularla.
c) Sabiendo que la energía mecánica en A(0,1,2) es 12 J, calcular la velocidad de la partícula en el punto B(0,3,0).
d) Calcular el trabajo realizado para trasladar la partícula desde el punto A hasta el punto B, por integración y sin integración.

Resolución

a) La ecuación diferencial de las líneas de fuerza es $\frac{dx}{?x} ? \frac{dy}{2y} ? \frac{dz}{?1}$; *su integración proporciona la ecuación de las líneas de fuerza como intersección de dos superficies*

$$\begin{array}{ll} ? Lnx ? \frac{1}{2}Lny ? LnC_1 & ? \; xy^{1/2} ? C_1 \\ ? Lnx ? ?z ? C_2 & ? \; x ? Ke^{?z} \end{array}$$

b) La fuerza que actúa sobre la partícula es conservativa, ya que su rotacional es nulo, por lo que se puede expresar como el gradiente de energía potencial, cambiada de signo,

$$? x\vec{i} ? 2y\vec{j} ? \vec{k} ? ?\frac{?U}{?x}\vec{i} ? \frac{?U}{?y}\vec{j} ? \frac{?U}{?z}\vec{k}$$

Además $dU ? \frac{?U}{?x}dx ? \frac{?U}{?y}dy ? \frac{?U}{?z}dz$; *sustituyendo los valores de las derivadas parciales por las correspondientes componentes de la fuerza (cambiadas de signo), se obtiene*

$dU ? xdx ? 2ydy ? dz$, *cuya integración proporciona* $U ? \frac{x^2}{2} ? y^2 ? z ? C$

c) Sabiendo que la energía mecánica en A(0,1,2) es 12 J, podemos calcular la constante de integración de la energía potencial, pues en A sabemos que la velocidad es 4m/s; por tanto

$\frac{1}{2}(1kg)(4m/s)^2 ? ?0 ? 1^2 ? 2 ? C? ? 12$, *la constante vale C=3. Aplicando la conservación de la energía mecánica en el punto B, se puede calcular la velocidad en este punto.*

d) El trabajo elemental durante un desplazamiento elemental es $dW ? \vec{F}\cdot d\vec{r} ? ?xdx ? 2ydy ? dz$; *al pasar de A a B, las coordenadas pasan de (0,1,2) a (0,3,0)*

$$W ? ?\int_0^0 ? xdx ? 2\int_1^3 ydy ? \int_2^0 dz ? y^2\Big|_1^3 ? z\Big|_2^0 ? 9 ? 1 ? (?0 ? 2) ? 10J$$

Se puede calcular sin integrar, mediante la diferencia entre la energía potencial y final

$$U_A ? U_B ? ?0 ? 1^2 ? 2 ? 3? ? (0 ? 3^2 ? 0 ? 3) ? 4 ? (?6) ? 10J$$