Una masa puntual está situada en un campo de fuerzas conservativo, siendo su potencial en un punto de coordenadas (x,y,z) V(x,y,z) = -xy-2z (J/kg).
Calcular:

a) El campo de fuerzas, $\vec{f}$, del que deriva y la fuerza a la que está sometida una partícula de masa m=2 kg.
b) La función energía potencial U(x,y,z), y su valor en un punto A de coordenadas (1,-2,-3) estando expresadas las coordenadas del punto en metros.
c) El trabajo realizado cuando la partícula anterior se desplaza desde el punto A de coordenadas (1,-2,-3) al origen de coordenadas O(0,0,0) a través del siguiente camino: Siguiendo la recta que une A y B (0,-2,-3), a continuación sigue la recta que une B y C (0,-2,0) y a continuación sigue la recta que une C y O. Confirmar el resultado por otro método.
d) Calcular la velocidad que tiene cuando llega al origen de coordenadas, si parte de A con velocidad v_A=3 m/s.

Resolución

a) El campo de fuerzas $\vec{f}$*, siendo éste conservativo, se expresa como el gradiente de potencial cambiado de signo, por tanto*

$$\vec{f} = -\vec{\nabla} V = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k} = y\vec{i} + x\vec{j} + 2\vec{k} \text{ (N/kg)}$$

La fuerza a la que está sometida una masa m, es igual al producto de la masa m por el campo $\vec{f}$*, por tanto la masa de 2kg está sometida a una fuerza*

$$\vec{F} = m\vec{f} = 2y\vec{i} + 2x\vec{j} + 4\vec{k} \text{ (N)}$$

b) La energía potencial en un punto cualquiera de coordenadas (x,y,z) es el producto del potencial V, por la masa m, esto es $U(x,y,z) = mV(x,y,z) = -2xy - 4z\ (J)$*. La energía potencial en la posición (1, -2, -3) es* $U(1,-2,-3) = -2(1)\cdot(-2) - 4(-3) = 16J$

c) *El trabajo elemental dW es el producto escalar de la fuerza* $\vec{F}$ *por el desplazamiento* $d\vec{r}$*, por tanto* $dW = (2y\vec{i} + 2x\vec{j} + 4\vec{k})\cdot(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}) = 2ydx + 2xdy + 4dz$

Al pasar del punto A al punto B, las coordenadas z e y permanecen constantes (z=-3, y=-2), mientras que la coordenada x varía entre 1 y 0; durante la trayectoria que une los puntos B y C, las coordenadas x e y permanecen constantes (x=0, y=-2) mientras que la coordenada z varía entre -3 y 0; durante la trayectoria recta que une los puntos C y O, las coordenadas x y z permanecen constantes (x=0, z=0) y la coordenada y varía entre -2 y 0.

Por tanto en la primera etapa, A-B, el trabajo elemental es $dW = 2ydx$*, ya que al ser z e y constantes se verifica dy=dz=0; además y=-2, que sustituido en la expresión del* *trabajo elemental proporciona* $dW = 2ydx = -4dx$ *, cuya integración proporciona* $W_{A-B} = \int_1^0 -4dx = -4(0-1) = 4J$

En la etapa B-C, el trabajo elemental es $dW = 4dz$ *, ya que al ser x e y constantes se verifica dx=dy=0, por lo que la integración del trabajo elemental entre los valores de z comprendidos entre -3 y 0 proporciona que sustituido en la expresión del trabajo elemental proporciona* $W_{B-C} = \int_{-3}^{0} 4dz = 4[0-(-3)] = 12J$

En la etapa C-O, el trabajo elemental es $dW = 2xdy$ *, ya que al ser x y z constantes se verifica dx=dz=0; introduciendo en la expresión del trabajo elemental el valor de x=0, el trabajo elemental es nulo, y el trabajo para ir de C a O también* $W_{C-O} = 0$

Por otro camino: *el trabajo para trasladar una partícula de un punto A a un punto O, cuando el campo de fuerzas es conservativo, es la diferencia de energía potencial entre ambos puntos, cambiada de signo. El trabajo es* $W_{A-O} = U_A - U_O = [-2(1)(-2) - 4(-3)] - [-2\cdot 0 - 4\cdot 0] = 16J$

d)La energía mecánica en el punto A es igual a la energía mecánica en el origen.

La energía mecánica en A, suma de la energía cinética y potencial es $E_{mA} = U_A + \frac{1}{2}2kg\cdot(3m/s)^2 = [-2(1)(-2) - 4(-3)] + 9 = 16 + 9 = 25J$

Y en el punto O es

$E_{mO} = U_0 + \frac{1}{2}2kg\cdot v_O^2 = 25J = v_O^2$ *, de donde la velocidad en O es* v_O*=5 m/s*