1. Demostrar que si el campo de fuerzas que actúa sobre un fluido es constante, las superficies de isopresión son planos perpendiculares a las líneas de fuerza y coinciden con las superficies equipotenciales

2. Escribir la ecuación de Bernouilli en términos de

a) Energía b) Energía por unidad de masa c) Presión d) Altura

3. A través de un venturímetro fluye agua a lo largo de una tubería horizontal de 20 cm de diámetro que en el estrechamiento se reduce a 10 cm. El manómetro en U está parcialmente lleno de mercurio (densidad relativa 13,5). Si la diferencia entre los niveles de mercurio del tubo en U es de 6 cm calcular

a) Velocidad del agua en las dos secciones
b) Caudal en litros/segundo

Considerar g=10 m/s^2

Resolución

1. $\vec{f} = \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P$ Desarrollando el gradiente, e igualándolo a un campo constante

$A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial P}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial P}{\partial z}\vec{k}\right)$. Multiplicando la fuerza por $d\vec{r}$ obtenemos el trabajo elemental, y al ser una fuerza conservativa es igual a –dU, esto es

$$Adx + Bdy + Cdx = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz\right) = -dU$$

La integración proporciona por un lado $\frac{P}{\rho} + C = Ax + By + Cz$ y por otro $\frac{P}{\rho} + U = C$.

De la primera se deduce que las superficies de isopresión (P=Cte) son planos y de la segunda se deduce que si la presión permanece constante la energía potencial también

2. a) Energía $\frac{mv^2}{2} + mgh + \frac{mP}{\rho} = C$

b) Energía por unidad de masa $\frac{v^2}{2} + gh + \frac{P}{\rho} = C$

c) Presión $\rho\frac{v^2}{2} + \rho gh + P = C$

d) Altura $\frac{v^2}{2g} + h + \frac{P}{\rho g} = C$

3. La relación entre los diámetros y velocidades entre dos puntos de una línea de corriente $\pi \frac{D_A^2}{4} v_A = \pi \frac{D_B^2}{4} v_B$ permite encontrar la relación entre las velocidades $20^2 v_A = 10^2 v_B$, o bien $v_B = 4v_A$

Al establecer el teorema de Bernouilli entre dos puntos de una tubería horizontal, los puntos A y B de la línea de corriente tienen la misma cota geométrica se obtiene

$$P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2$$

de donde $P_A - P_B = \frac{1}{2}\rho v_B^2 - \frac{1}{2}\rho v_A^2 = \frac{1}{2}\rho 16 v_A^2 - \frac{1}{2}\rho v_A^2 = \frac{15}{2}\rho v_A^2 = 7500 v_A^2$

Por otro lado, el desnivel de 6 cm observado en las ramas del tubo en U permite establecer la diferencia de presiones entre los puntos A y B como

$$P_A - P_B = \left(\rho_{Hg} - \rho\right) gz = \left(13{,}5 \cdot 10^3 - 10^3\right)\frac{kg}{m^3} \cdot 10 \frac{m}{s^2} 0{,}06 m = 7500 Pa$$

Igualando esta expresión y la anterior se deduce que la velocidad en A es 1 m/s y en B 4 m/s.

b) El caudal es $Q = S_A v_A = \pi(0{,}1m)^2 1m/s = 0{,}01\pi \frac{m^3}{s} = 10\pi l/s$