Un cuerpo de 9 kg de masa unido a un muelle de constante recuperadora K, reposa sobre una superficie horizontal sin rozamiento. En el instante inicial t=0 se le imprime una velocidad de 0,6 m/s, de forma que el muelle se comprime y se pone en marcha un movimiento armónico simple de periodo $T = \frac{\pi}{3}$ segundos. Obtener:

a) Constante recuperadora del muelle.
b) Desplazamiento, velocidad y aceleración en función del tiempo: x(t), x'(t), x''(t).
c) Instantes en los que la velocidad se reduce a la mitad de la velocidad máxima.

Resolución

a) A partir del valor del periodo se deduce la frecuencia propia $T = \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{\omega}$, de donde ω=6 rad/s.

Por otra parte, como $\omega = 6\ rad/s = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{K}{9kg}}$ se deduce que K=324 N/m.

b) La ecuación diferencial del movimiento es mx´´+Km=0, siendo la solución de la ecuación diferencial de la forma $x = A\cos(\omega t + B)$, y la derivada $x' = -A\omega\cos(\omega t + B)$. En el instante t=0, la velocidad toma el máximo valor x´=A·ω y el módulo es 0,6 m/s de donde $0{,}6 = -A \cdot 6\ \mathrm{sen}\ (B)$. Por tanto, la amplitud A=9,1m y B=π rad.
Por tanto la elongación es de la forma $x = 0{,}1\cos(6t + \pi)$ o bien $x = -0{,}1\ cos\ 6t$.
Derivando esta expresión se obtiene la velocidad $x' = -0{,}6sen6t$ y la aceleración $x'' = -3{,}6\ cos6t$

c) La velocidad se reduce a la mitad del valor máximo (el valor máximo es 0,6 m/s) cuando se verifica $0{,}3 = \pm 0{,}6sen6t$, esto es cuando $sen6t = \pm 0{,}5$, lo cual ocurre cuando

$$6t_1 = 30º = \frac{\pi}{6}rad$$
$$6t_2 = 150º = \frac{5\pi}{6}rad$$
$$6t_3 = 220º = \frac{7\pi}{6}rad$$
$$6t_4 = 330º = \frac{11\pi}{6}rad$$

Y los tiempos solicitados son

$$t_1 = \frac{\pi}{36}s$$
$$t_2 = \frac{5\pi}{36}\ \ s$$
$$t_3 = \frac{7\pi}{36}\ \ s$$
$$t_4 = \frac{11\pi}{36}\ \ s$$