

Una partícula de masa $m= 2\text{kg}$ se mueve sobre una recta horizontal (eje X) con movimiento armónico simple, siendo la constante recuperadora de la fuerza $k=32\text{ N/m}$.

- a) Definir dinámicamente el movimiento de la partícula
- b) Basándose en la definición anterior, expresar la ecuación diferencial que define el movimiento de la partícula y calcular su frecuencia propia ω
- c) Calcular, en función del tiempo t , el desplazamiento y la velocidad, si para el instante inicial $t=0$ el desplazamiento es $0,5\text{ m}$ y su velocidad nula.
- d) Deducir calcular la energía potencial en función del tiempo x , si cuando pasa por la posición de equilibrio esta energía se anula. Indicar para qué posición la energía potencial se hace máxima y dar su valor.
- e) Calcular la energía mecánica y la energía cinética en función del desplazamiento y representar ambas energías.

Resolución

1.a) El movimiento armónico simple, desde el punto de vista dinámico, es el movimiento que realiza una partícula de masa m sometida a una fuerza atractiva hacia la posición de equilibrio estable y cuyo módulo es proporcional a la distancia $x(t)$ que separa en cada instante a la partícula de la posición de equilibrio. La partícula realiza un movimiento sobre una recta, variando la distancia x desde un valor máximo y un valor nulo (cuando pasa por la posición de equilibrio).

Ese movimiento es análogo al que realiza una partícula de masa m unida a un muelle, cuando se separa la partícula de la posición de equilibrio (alargando o encogiendo el muelle) y se suelta sin velocidad inicial.

b) La fuerza aplicada es igual al producto de la masa por la aceleración, esto es $\vec{F} = -kx\vec{i} = -32x\vec{i} = 2x''\vec{i}$ por tanto la ecuación diferencial del movimiento es $x''+16x=0$ o bien $x''+\omega^2x=0$ de donde la pulsación o frecuencia propia es $\omega = 4\text{rad/s}$

c) La solución de la ecuación diferencial es de la forma $x = A\cos(4t + B)$ y la velocidad es

$x' = -4A\sin(4t + B)$; con las condiciones iniciales del enunciado se sabe que

$0,5 = A \cos B$ y que $0 = -4A \sin B$ de donde $B=0$ y $A=0,5\text{m}$; por lo que la ecuación que relaciona la posición x y el tiempo t es $x = 0,5 \cos 4t$ y la velocidad es $x' = -2 \sin 4t$

d) La fuerza es conservativa, por lo existe la función energía potencial, de forma que

$$\vec{F} = -32x\vec{i} = -\frac{dU}{dx}\vec{i}; \text{ de aquí se deduce que } dU = 32x dx \text{ cuya integración, con las}$$

condiciones iniciales proporciona $U = 16x^2$; esta energía toma valor nulo cuando $x=0$, posición de equilibrio, y toma su valor máximo cuando x toma su valor máximo ($x=A=0,5\text{m}$).

$$U_{\max} = 16 (0,5)^2 = 4\text{J}$$

e) Cuando la energía potencial es máxima, la cinética es nula, por lo que toda la energía mecánica corresponde a la energía potencial; la energía mecánica es $E=4\text{J}$, que es la suma de la energía potencial $U = 16x^2$ y la cinética E_c de donde $E_c = 4 - 16x^2$

