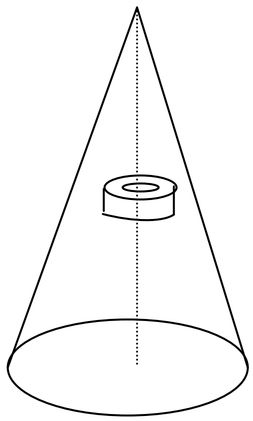
Momento de inercia de un cono de radio R, altura H masa M respecto a su centro de gravedad

El volumen del cono es $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$ y su masa $M = \frac{1}{3}\rho\pi R^2 H$

Consideramos un sistema de referencia tal que su eje de revolución es el eje OZ, y la base es el plano XOY.

El momento de inercia respecto al centro de gravedad es la suma del momento de inercia respecto al eje GZ y el momento de inercia respecto al plano perpendicular (XGY) que pasa por él.



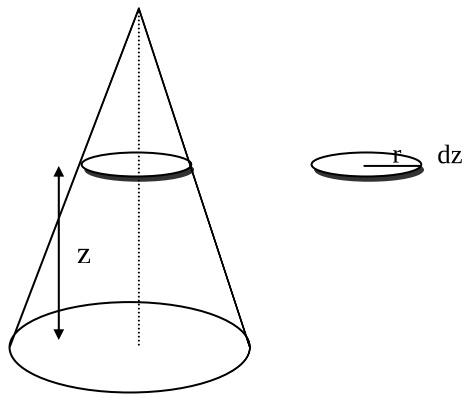
El momento de inercia respecto al eje GZ es $I_{GZ} = \iiint r^2 dm$; consideramos un elemento diferencial de volumen $dV = 2\pi r dz dr$, situado a una distancia *r* del eje GZ. Es un cilindro hueco de radio interior *r*, radio exterior *r+dr* y altura *dz*, por lo que la masa es $dm = \rho 2\pi r dz dr$. La distancia *z* varia entre *0* (en la base) y *H* (en el vértice) y la distancia *r* varía entre *0* (en el eje) y *R*. El momento de inercia respecto a GZ es $I_{GZ} = \iiint r^2 dm = \iiint r^2 \rho 2\pi r dr dz = \rho 2\pi \iint z r^3 dr$ donde el valor de *z* es variable, dependiendo de *r*, $z = \left(1 - \frac{r}{R}\right)H$, por tanto

$$I_{GZ} = \rho 2\pi H \int \left(r^3 - \frac{r^4}{R}\right) dr = 2\pi\rho H \left[\frac{R^4}{4} - \frac{R^5}{5R}\right] = \rho\pi H \frac{R^4}{10} = \left(\frac{\rho\pi H R^2}{3}\right)\frac{3}{10}R^2 = \frac{3}{10}MR^2$$

Aplicando el teorema de Steiner, el momento de inercia respecto al plano que pasa por el centro de gravedad (XGY) es igual al momento de inercia respecto a un plano paralelo a él, que pasa por la base, menos la masa por el cuadrado de la distancia que separa ambos planos (el centro de gravedad se encuentra a *H/4* de la base).

El momento de inercia respecto al plano que pasa por la base del cono es $I_{base} = \iiint z^2 dm$

Elegimos un elemento diferencial de volumen, que es un cilindro de radio *r*, situado a una distancia *z* de la base. Su masa es $dm = \rho\pi r^2 dz$, siendo $r = \frac{R}{H}(H - z)$. Por tanto $r^2 = \frac{R^2}{H^2}(H^2 + z^2 - 2zH)$



Por tanto el momento de inercia respecto a la base es

$$I_{base} = \rho\pi \frac{R^2}{H^2}\int_0^H \left(H^2 z^2 + z^4 - 2Hz^3\right)dz = \frac{\rho\pi R^2}{H^2}\left[\frac{H^2 H^3}{3} + \frac{H^5}{5} - 2H\frac{H^4}{4}\right] = \frac{1}{30}\rho\pi R^2 H^3 =$$

$$= \left(\frac{1}{3}\rho\pi R^2 H\right)\frac{1}{10}H^2 = \frac{1}{10}MH^2 = I_{XOY}$$

El momento de inercia respecto al plano paralelo que pasa por el centro de gravedad es, aplicando el teorema de Steiner

$$I_{XGY} = \frac{3}{80}MH^2$$

$$I_G = \frac{3}{80}MH^2 + \frac{3}{10}MR^2$$