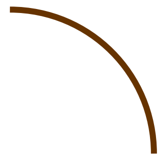
Momento de inercia de un cuarto de circunferencia de masa M y radio R respecto a su centro de gravedad

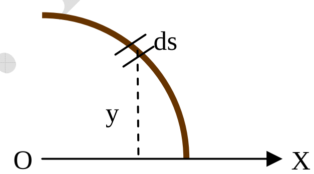


La masa de la cuarta parte de una circunferencia es $M = \lambda L = \dfrac{\lambda \pi R}{2}$

El momento de inercia respecto al centro de gravedad puede calcularse por aplicación del teorema de Steiner, calculando previamente el momento de inercia respecto al punto O. El momento de inercia respecto a O se puede calcular directamente o calculando previamente los momentos de inercia respecto a planos y/o ejes

1º Método. El momento de inercia respecto a un punto es la suma de los momentos de inercia respecto a los dos ejes perpendiculares entre sí que se cortan en él.

El momento de inercia del cuarto de circunferencia respecto al eje OX y respecto al eje OY es el mismo, por simetría. Consideramos un elemento diferencial de arco, situado a una distancia *y* del eje OX, cuya masa es $dm = \lambda ds$. Como *x* e *y* se pueden expresar en función del ángulo *φ*, en el cuarto de circunferencia este ángulo varía entre *0* y *π/2*.



$$I_{OX} = \int_L y^2 dm = \int_L y^2 \lambda ds = \lambda \int_L \left(R^2 \operatorname{sen}^2 \varphi\right) ds = \lambda R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2 \varphi R d\varphi = \lambda R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2 \varphi d\varphi = I_{OY}$$

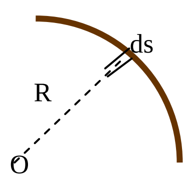
Como $\operatorname{sen}^2 \varphi = \dfrac{1-\cos 2\varphi}{2}$ su integral es $\int \operatorname{sen}^2 \varphi d\varphi = \int \dfrac{1-\cos 2\varphi}{2} d\varphi = \dfrac{\varphi}{2} - \dfrac{\operatorname{sen} 2\varphi}{4}$

Por tanto, el momento de inercia respecto al eje OX es

$$I_{OX} = \lambda R^3 \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{sen 2\varphi}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \lambda R^3 \frac{\pi}{4} = \left(\frac{\lambda \pi R}{2}\right)\frac{R^2}{2} = \frac{MR^2}{2} = I_{OY}$$

y el momento de inercia respecto a O $I_O = I_{OX} + I_{OY} = MR^2$

2º Método. Momento de inercia respecto a O, para lo cual se considera un elemento diferencial de arco *ds*, cuya masa es $dm = \lambda ds$, situado a una distancia *R* de O. El momento de inercia respecto a O es



$$I_O = \int_L r^2 dm = \int_L R^2 \lambda dl = R^2 \lambda \int_L dl = R^2 \lambda L = R^2 M$$

El cuadrado de la distancia que separa el punto O y el G es $d^2 = \left(\frac{2R}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2R}{\pi}\right)^2 = \frac{8R^2}{\pi^2}$

y el momento de inercia respecto al centro de gravedad es

$$I_G = I_O - M\frac{8R^2}{\pi^2} = MR^2\left(\frac{\pi^2 - 8}{\pi^2}\right)$$