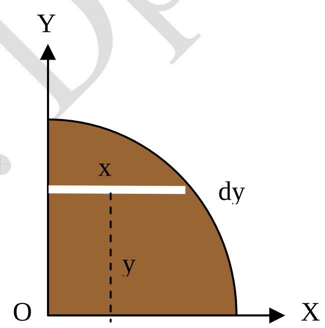
Momento de inercia de un cuarto de círculo de masa M y radio R respecto a su centro de gravedad

El área del cuarto de círculo es $A = \frac{1}{4}\pi R^2$ y su masa $M = \frac{1}{4}\sigma\pi R^2$. Consideramos que el círculo está contenido en el plano XY.

El momento de inercia respecto al centro de gravedad se calcula por aplicación del teorema de Steiner, calculando previamente el momento de inercia respecto al punto O. El momento de inercia respecto a O se puede calcular directamente o calculando previamente los momentos de inercia respecto a planos y/o ejes

1º Método. El momento de inercia del cuarto de círculo respecto al eje OX y respecto al eje OY es el mismo, por simetría. Consideramos un elemento diferencial de masa, situado a una distancia *y* del eje OX, cuya masa es $dm = \sigma x dy$. Tanto *x* como *y* se pueden expresar en función del ángulo *φ*, en el cuarto de circunferencia este ángulo varía entre *0* y *π/2*.



$$I_{OX} = \iint_A y^2 dm = \iint_A y^2 \sigma x dy = \sigma \iint_A (R^2 sen^2\varphi)(R\cos\varphi)R\cos\varphi d\varphi = \sigma R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2\varphi\cos^2\varphi d\varphi$$

Como $\operatorname{sen}2\varphi = 2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi$, se tiene que $\operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\varphi = (\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi)^2 = \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 2\varphi$

La integral

$$\int \operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\varphi d\varphi = \frac{1}{4}\int \operatorname{sen}^2 2\varphi d\varphi = \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4\varphi}{2} d\varphi = \frac{1}{8}\int (1-\cos 4\varphi) d\varphi = \frac{1}{8}\left[\varphi - \frac{1}{4}\operatorname{sen}4\varphi\right]$$

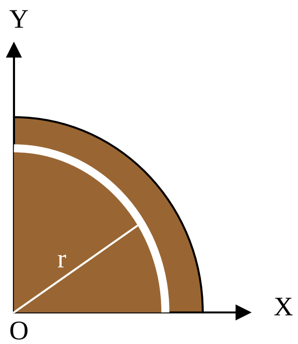
El momento de inercia respecto al eje OX es

$$I_{OX} = \sigma R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\varphi d\varphi = \sigma R^4 \frac{1}{8}\left[\varphi - \frac{1}{4}\operatorname{sen}4\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sigma R^4}{8}\frac{\pi}{2} = \left(\frac{\sigma\pi R^2}{4}\right)\frac{R^2}{4} = \frac{MR^2}{4}$$

El momento de inercia respecto a O es

$$I_O = I_{OX} + I_{OY} = \frac{MR^2}{2}$$

2º Método. Momento de inercia respecto a O; se considera un elemento diferencial de superficie, tira de espesor *dr* cuya longitud es la de un cuarto de circunferencia de radio *r*, situada a una distancia *r* (*0≤r≤R*) del punto O, por lo que su masa es



$dm = \sigma dA = \frac{1}{2}\sigma\pi r dr$. El momento de inercia respecto a O es

$$I_O = \iint_A r^2 dm = \iint_A r^2 \left(\frac{\sigma\pi r dr}{2}\right) = \frac{1}{2}\sigma\pi \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2}\sigma\pi \frac{R^4}{4} = \left(\frac{\sigma\pi R^2}{4}\right)\frac{R^2}{2} = \frac{MR^2}{2}$$

El cuadrado de la distancia que separa el centro de gravedad y el punto O es

$$d^2 = \left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2 + \left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2 = \frac{32R^2}{9\pi^2}$$

El momento de inercia respecto al centro de gravedad es

$$I_G = \frac{1}{2}MR^2 - M\frac{32R^2}{9\pi^2} = MR^2\left(\frac{9\pi^2 - 64}{18\pi^2}\right)$$