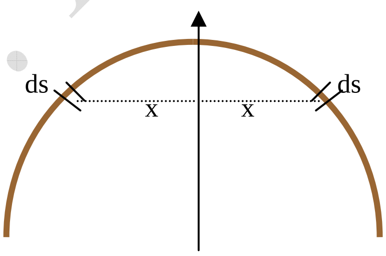
Momento de inercia de una semicircunferencia de masa M y radio R respecto a su centro de gravedad

La masa de la semicircunferencia es $M = \lambda L = \lambda \pi R$

El momento de inercia respecto al centro de gravedad puede calcularse por aplicación del teorema de Steiner, calculando previamente el momento de inercia respecto al punto O. El momento de inercia respecto a O se puede calcular directamente o calculando previamente los momentos de inercia respecto a planos y/o ejes

1º Método. El momento de inercia respecto al punto O es la suma de los momentos de inercia respecto a los dos ejes perpendiculares entre sí que se cortan en él. Calculamos el momento de inercia de la semicircunferencia respecto al eje OY, y debido a la simetría el momento de inercia respecto al eje OX es el mismo.

Consideramos un elemento diferencial de arco, cuya masa es $dm = \lambda ds$ situado a una distancia x del eje OY, y existe a la misma distancia x del eje de simetría un elemento diferencial de masa idéntico. Al realizar la integral de x^2dm extendida a la longitud de la semicircunferencia (L) se puede considerar que es igual a realizar 2 veces la integral de x^2dm extendida a la longitud del cuarto de circunferencia ($L/2$)



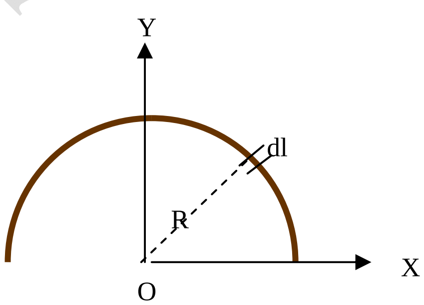
$$I_{OY} = \int_L x^2 dm = \int_L x^2 \lambda ds = 2\lambda \int_{L/2} \left(R^2 \cos^2\varphi\right) ds = 2\lambda R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi R d\varphi = 2\lambda R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi d\varphi$$

Como $\cos^2\varphi = \dfrac{1+\cos 2\varphi}{2}$ su integral es $\int \cos^2\varphi d\varphi = \int \dfrac{1+\cos 2\varphi}{2} d\varphi = \dfrac{\varphi}{2} + \dfrac{\operatorname{sen} 2\varphi}{4}$

Por tanto, el momento de inercia respecto al eje OY es

$$I_{OY} = 2\lambda R^3 \left[\frac{\varphi}{2} + \frac{sen 2\varphi}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\lambda R^3 \frac{\pi}{4} = (\lambda \pi R)\frac{R^2}{2} = \frac{MR^2}{2} = I_{OX}$$

El momento de inercia respecto a O es $I_O = I_{OX} + I_{OY} = MR^2$



2º Método. Momento de inercia respecto a O, para lo cual se considera un elemento diferencial de arco *ds*, cuya masa es $dm = \lambda ds$, situado a una distancia *R*. El momento de inercia respecto a O es

$$I_O = \int_L r^2 dm = \int_L R^2 \lambda dl = R^2 \lambda \int_L dl = R^2 \lambda L = R^2 M$$

El momento de inercia respecto al centro de gravedad es, aplicando el teorema de Steiner

$$I_G = I_O - M\left(\frac{R}{2\pi}\right)^2 = MR^2\left(\frac{4\pi^2 - 1}{4\pi^2}\right)$$