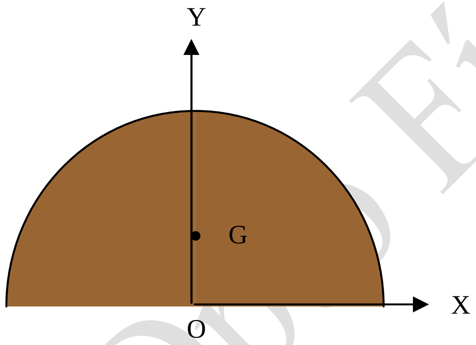
Momento de inercia de un semicírculo de masa M y radio R respecto a su centro de gravedad

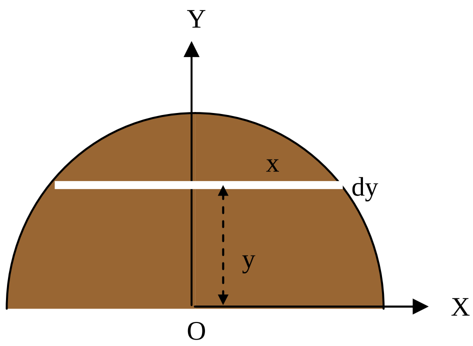
El área del semicírculo es $A = \frac{1}{2}\pi R^2$ y su masa $M = \frac{1}{2}\sigma\pi R^2$



Consideramos que el círculo está contenido en el plano XY.

El momento de inercia respecto al centro de gravedad puede calcularse por aplicación del teorema de Steiner, calculando previamente el momento de inercia respecto al punto O. El momento de inercia respecto a O se puede calcular directamente o calculando previamente los momentos de inercia respecto a planos y/o ejes

1º método. El momento de inercia respecto al punto O es la suma de los momentos de inercia respecto a los ejes OX y OY, y en el semicírculo, el momento de inercia respecto al eje OX y respecto al eje OY es el mismo, por simetría. El momento de inercia respecto al eje OX es $I_{OX} = \iint_A y^2 dm$



Consideramos un elemento diferencial de masa, a una distancia *y* del eje OX, y existe otro elemento diferencial de masa simétrico, tal que ambos proporcionan el mismo valor de y^2dm. Por tanto, puede considerarse que la integral de y^2dm extendida al área del semicírculo (*A*) es igual a considerar 2 veces la integral extendida al cuarto de círculo (*A/2*).

La masa del elemento diferencial es $dm = \sigma x dy$. Tanto *x* como *y* se pueden expresar en función del ángulo φ, en el cuarto de círculo este ángulo varía entre *0* y $\pi/2$.

$$I_{OX} = \iint_A y^2 dm = \iint_A y^2 \sigma x dy = 2\sigma \iint_{A/2} (R^2 \operatorname{sen}^2\varphi)(R\cos\varphi)(R\cos\varphi)d\varphi = 2\sigma R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2\varphi \cos^2\varphi \, d\varphi$$

Como $\operatorname{sen} 2\varphi = 2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi$, se tiene que $\operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\varphi = (\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi)^2 = \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 2\varphi$

La integral

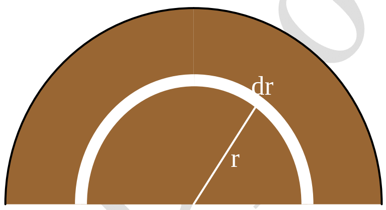
$$\int \operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\varphi d\varphi = \frac{1}{4}\int \operatorname{sen}^2 2\varphi d\varphi = \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4\varphi}{2}d\varphi = \frac{1}{8}\int (1-\cos 4\varphi)d\varphi = \frac{1}{8}\left[\varphi - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4\varphi\right]$$

El momento de inercia respecto al eje OX es

$$I_{OX} = 2\sigma R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\varphi d\varphi = \sigma R^4\frac{2}{8}\left[\varphi - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sigma R^4}{4}\frac{\pi}{2} = \left(\frac{\sigma\pi R^2}{2}\right)\frac{R^2}{4} = \frac{MR^2}{4}$$

El momento de inercia respecto a O es $I_O = I_{OX} + I_{Oy} = \dfrac{MR^2}{2}$

2º Método. Momento de inercia respecto al punto O. Se considera un elemento diferencial de superficie, una tira de espesor *dr* y cuya longitud es la de una semicircunferencia de radio *r*, situada a una distancia *r* ($0\leq r\leq R$) del punto O, por lo que su masa es $dm = \sigma dA = \sigma\pi r dr$. El momento de inercia respecto a O es



$$I_O = \iint_A r^2 dm = \iint_A r^2\sigma\pi r dr = \sigma\pi\int_0^R r^3 dr = \sigma\pi\frac{R^4}{4} = \left(\frac{\sigma\pi R^2}{2}\right)\frac{R^2}{2} = \frac{MR^2}{2}$$

El momento de inercia respecto al centro de gravedad es

$$I_G = \frac{1}{2}MR^2 - M\left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2 = MR^2\left(\frac{9\pi^2-32}{18\pi^2}\right)$$