

Una plataforma circular de radio R m, está sometida a tres rotaciones (en sentido antihorario) alrededor de ejes paralelos entre sí y perpendiculares al plano en el que está contenida la plataforma (plano

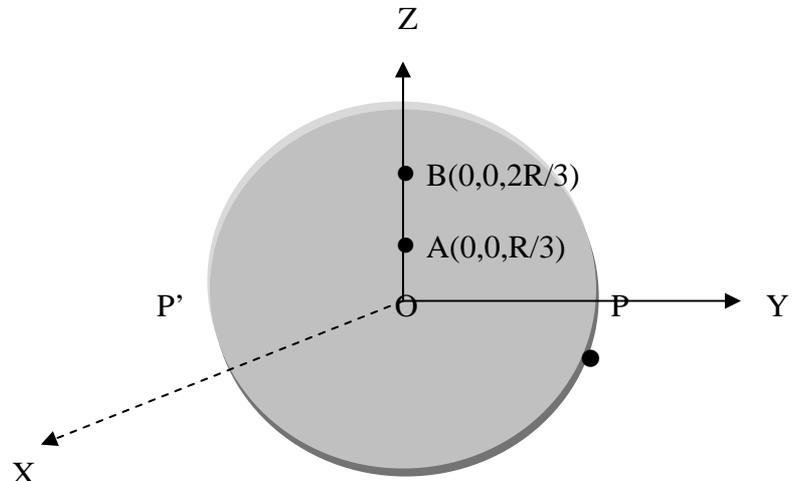
YOZ)

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \frac{\text{rad}}{\text{s}}; \quad O(0,0,0)$$

$$\omega_2 = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}; \quad A(0,0,\frac{R}{3})$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2} \frac{\text{rad}}{\text{s}}; \quad B(0,0,\frac{2R}{3})$$

siendo O, A y B puntos de cada uno de los tres ejes de rotación.



Calcular

- Vector velocidad de los puntos O, A y B.
- Velocidad de mínimo deslizamiento
- Ecuación del eje instantáneo de rotación y deslizamiento (EIRD) y dibujarlo
- Hacer el movimiento equivalente a otro más sencillo, reduciendo en un punto del E.I.R.D
- Teniendo en cuenta la equivalencia anterior (apartado d) suponer que sobre la plataforma se encuentra una partícula que el instante inicial $t=0$ ocupa la posición P indicada en la figura ($v_0=0$) que se dirige hacia el punto opuesto P', siguiendo una hendidura practicada en un diámetro (eje OY) con una velocidad $v = \frac{2R}{\pi^2} t \text{ m/s}$

Cuando el punto P ha dado una vuelta completa y vuelve a ocupar la posición inicial, la partícula se encuentra en O (0,0,0). Calcular en este instante la velocidad y aceleración absoluta de la partícula.

Resolución

a) La velocidad del punto O es debida a las tres rotaciones, por tanto

$$\vec{v}_O = \vec{OO} \wedge \vec{\omega}_1 + \vec{OA} \wedge \vec{\omega}_2 + \vec{OB} \wedge \vec{\omega}_3 = \vec{0} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \frac{R}{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \frac{2R}{3} \\ 0,5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{2R}{3} \vec{j} \text{ m/s}$$

La velocidad de los puntos A y B se determina aplicando la ecuación del cambio de momentos, teniendo en cuenta que la rotación resultante es $\vec{\omega} = 2\vec{i}$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{AO} \wedge \vec{\omega} = \frac{2R}{3}\vec{j} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -\frac{R}{3} \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_O + \vec{BO} \wedge \vec{\omega} = \frac{2R}{3}\vec{j} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -\frac{2R}{3} \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{2R}{3}\vec{j} \text{ m/s}$$

b) La velocidad de mínimo deslizamiento es el segundo invariante, esto es

$$v_{min} = \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{v}_O}{|\vec{\omega}|} = 0, \text{ por tanto, el punto A tiene velocidad de mínimo deslizamiento y}$$

pertenece al eje instantáneo de rotación deslizamiento.

c) La ecuación del eje instantáneo, una vez que se conoce un punto de dicho eje y su

vector director es $\frac{x}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z - \frac{R}{3}}{0}$, de donde puede deducirse que dicho eje es la

intersección de dos planos

$$\Pi_1 \equiv y = 0$$

$$\Pi_2 \equiv z = \frac{R}{3}$$

d) Los puntos que pertenecen al E.I.R.D tienen velocidad nula, siendo no nula la rotación resultante; por tanto el sistema se reduce a la rotación resultante $\vec{\omega} = 2\vec{j}$ aplicada en el punto A.

e) Cuando el punto P describe una vuelta completa (2π radianes) tarda un tiempo t_1 de forma que $2\pi = \omega t_1 = 2t_1$. El punto P ha tardado $t_1 = \pi$ s. En el movimiento relativo, la

partícula se mueve sobre la hendidura con velocidad $v = \frac{2R}{\pi^2}t$ m/s hacia la izquierda,

y la aceleración es $a = \frac{dv}{dt} = \frac{2R}{\pi^2} \text{ m/s}^2$ también hacia la izquierda; y en el instante t_1 su

velocidad es $v = \frac{2R}{\pi^2}\pi = \frac{2R}{\pi} \text{ m/s}$.

Por tanto la velocidad y aceleración relativas son $\vec{v}_r = -\frac{2R}{\pi}\vec{j} \text{ m/s}$ y

$$\vec{a}_r = -\frac{2R}{\pi^2}\vec{j} \text{ m/s}^2$$

Durante el movimiento de arrastre, la partícula describe una trayectoria circular, de centro A, girando en torno al EIRD con velocidad angular $\vec{\omega} = 2\vec{i}$. Por tanto el vector que une el centro de la circunferencia y la partícula, en el instante considerado, es

$$\vec{r}_{ar} = \frac{R}{3}\vec{k}. \text{ La velocidad y aceleración de arrastre son } \vec{v}_{ar} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{ar} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R}{3} \end{vmatrix} = \frac{2R}{3}\vec{k}$$

m/s y

$$\vec{a}_{ar} = \vec{\alpha} \wedge \vec{r}_{ar} - \omega^2 \vec{r}_{ar} = -\frac{4R}{3}\vec{k} \text{ m/s}^2$$

La aceleración de Coriolis es $\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{ar} = 2 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2R}{\pi} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{8R}{\pi}\vec{k} \text{ m/s}^2$

Por tanto, la velocidad y aceleración absolutas son

$$\vec{v}_a = -\frac{2R}{\pi}\vec{j} + \frac{2R}{3}\vec{k} \text{ m/s} \quad \vec{a}_a = -\frac{2R}{\pi^2}\vec{j} + \left(-\frac{4R}{3} - \frac{8R}{\pi}\right)\vec{k} \text{ m/s}^2$$

