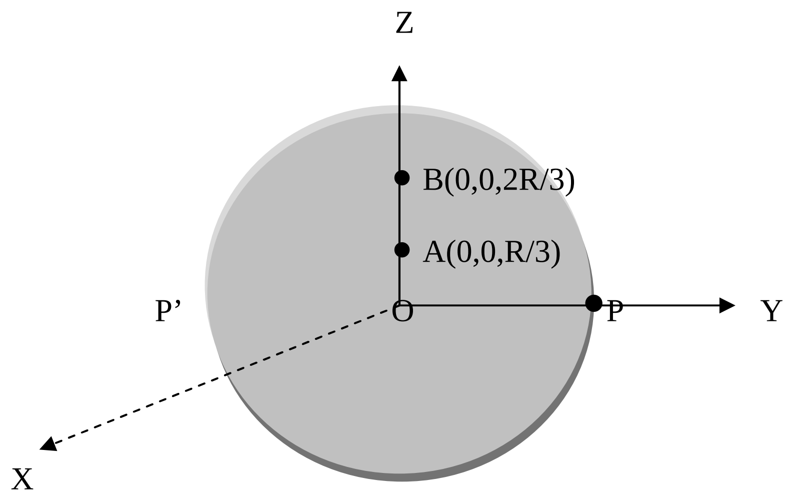
Una plataforma circular de radio R m, está sometida a tres rotaciones (en sentido antihorario) alrededor de ejes paralelos entre sí y perpendiculares al plano en el que está contenida la plataforma (plano YOZ)

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\frac{rad}{s}; \quad O(0,0,0)$$

$$\omega_2 = 1\frac{rad}{s}; \quad A(0,0,\frac{R}{3})$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2}\frac{rad}{s}; \quad B(0,0,\frac{2R}{3})$$

siendo O, A y B puntos de cada uno de los tres ejes de rotación.



Calcular

a) Vector velocidad de los puntos O, A y B.
b) Velocidad de mínimo deslizamiento
c) Ecuación del eje instantáneo de rotación y deslizamiento (EIRD) y dibujarlo
d) Hacer el movimiento equivalente a otro más sencillo, reduciendo en un punto del E.I.R.D
e) Teniendo en cuenta la equivalencia anterior (apartado d) suponer que sobre la plataforma se encuentra una partícula que el instante inicial t=0 ocupa la posición P indicada en la figura (v_0=0) que se dirige hacia el punto opuesto P', siguiendo una hendidura practicada en un diámetro (eje OY) con una velocidad $v = \frac{2R}{\pi^2}t \quad m/s$

Cuando el punto P ha dado una vuelta completa y vuelve a ocupar la posición inicial, la partícula se encuentra en O (0,0,0). Calcular en este instante la velocidad y aceleración absoluta de la partícula.

Resolución

a) La velocidad del punto O es debida a las tres rotaciones, por tanto

$$\vec{v}_O = \overrightarrow{OO} \wedge \vec{\omega}_1 + \overrightarrow{OA} \wedge \vec{\omega}_2 + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{\omega}_3 = \vec{0} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \frac{R}{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \frac{2R}{3} \\ 0{,}5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{2R}{3}\vec{j} \text{ m/s}$$

La velocidad de los puntos A y B se determina aplicando la ecuación del cambio de momentos, teniendo en cuenta que la rotación resultante es $\vec{\omega} = 2\vec{i}$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_O + \overrightarrow{AO} \wedge \vec{\omega} = \frac{2R}{3}\vec{j} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -\frac{R}{3} \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_O + \overrightarrow{BO} \wedge \vec{\omega} = \frac{2R}{3}\vec{j} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -\frac{2R}{3} \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{2R}{3}\vec{j} \text{ m/s}$$

b) La velocidad de mínimo deslizamiento es el segundo invariante, esto es

$v_{min} = \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{v}_O}{|\vec{\omega}|} = 0$, por tanto, el punto A tiene velocidad de mínimo deslizamiento y pertenece al eje instantáneo de rotación deslizamiento.

c) La ecuación del eje instantáneo, una vez que se conoce un punto de dicho eje y su vector director es $\frac{x}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z - \frac{R}{3}}{0}$, de donde puede deducirse que dicho eje es la intersección de dos planos

$$\Pi_1 \equiv y = 0$$

$$\Pi_2 \equiv z = \frac{R}{3}$$

z=R/3

d) Los puntos que pertenecen al E.I.R.D tienen velocidad nula, siendo no nula la rotación resultante; por tanto el sistema se reduce a la rotación resultante $\vec{\omega} = 2\vec{j}$ aplicada en el punto A.

e) Cuando el punto P describe una vuelta completa (2π radianes) tarda un tiempo t_1 de forma que $2\pi = \omega t_1 = 2t_1$. El punto P ha tardado $t_1=\pi$ s. En el movimiento relativo, la partícula se mueve sobre la hendidura con velocidad $v = \frac{2R}{\pi^2}t \quad m/s$ hacia la izquierda, y la aceleración es $a = \frac{dv}{dt} = \frac{2R}{\pi^2} \quad m/s^2$ también hacia la izquierda; y en el instante t_1 su velocidad es $v = \frac{2R}{\pi^2}\pi = \frac{2R}{\pi} \quad m/s$.

Por tanto la velocidad y aceleración relativas son $\vec{v}_r = -\frac{2R}{\pi}\vec{j} \quad m/s$ y $\vec{a}_r = -\frac{2R}{\pi^2}\vec{j} \quad m/s^2$

Durante el movimiento de arrastre, la partícula describe una trayectoria circular, de centro A, girando en torno al EIRD con velocidad angular $\vec{\omega} = 2\vec{i}$. Por tanto el vector que une el centro de la circunferencia y la partícula, en el instante considerado, es $\vec{r}_{ar} = \frac{R}{3}\vec{k}$. La velocidad y aceleración de arrastre son $\vec{v}_{ar} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{ar} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R}{3} \end{vmatrix} = \frac{2R}{3}\vec{k}$ m/s y

$$\vec{a}_{ar} = \vec{\alpha} \wedge \vec{r}_{ar} - \omega^2 \vec{r}_{ar} = -\frac{4R}{3}\vec{k} \ \text{m/s}^2$$

La aceleración de Coriolis es $\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r = 2\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2R}{\pi} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{8R}{\pi}\vec{k}$ m/s²

Por tanto, la velocidad y aceleración absolutas son

$$\vec{v}_a = -\frac{2R}{\pi}\vec{j} + \frac{2R}{3}\vec{k} \ \text{m/s} \qquad \vec{a}_a = -\frac{2R}{\pi^2}\vec{j} + \left(-\frac{4R}{3} - \frac{8R}{\pi}\right)\vec{k} \ \text{m/s}^2$$