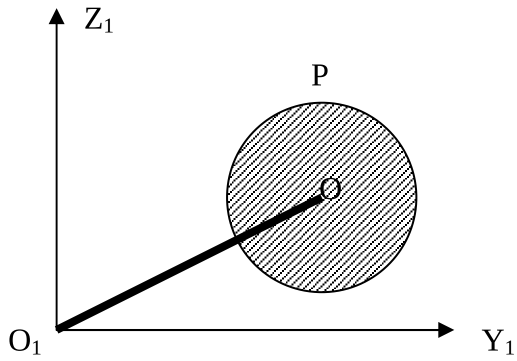
Una pieza de maquinaria está formada por una brazo metálico O_1O de 4 m unido a una pieza circular de radio 2m. La figura está contenida en el plano YOZ. El brazo gira en torno al eje O_1X_1 con velocidad angular ω_1=2t rad/s en sentido antihorario y el disco gira en torno aun eje perpendicular e él que pasa por su centro con velocidad angular ω_2=2 rad/s en sentido horario. En el instante t=2 s el brazo forma con la horizontal un ángulo de 30º. Calcular en ese instante la velocidad del punto situado en la parte superior del disco (punto P)



1º Método. Aplicación de las fórmulas

Cálculo de velocidades

Velocidad relativa $\vec{v}_r = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$

Velocidad de arrastre $\vec{v}_{ar} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge \vec{r}$

siendo $\vec{v}_0 = \frac{d\vec{r}_O}{dt} = \frac{dx_O}{dt}\vec{i} + \frac{dy_O}{dt}\vec{j} + \frac{dz_O}{dt}\vec{k}$, $\vec{r} = O\vec{P}$ y $\vec{\omega}$ la velocidad de rotación del sistema móvil, en este caso, $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1$.

En una posición genérica del brazo, éste forma un ángulo φ_1 con la horizontal, por lo que $\vec{r}_O = \overrightarrow{O_1O} = 4\cos\varphi_1\vec{j} + 4\,\mathrm{sen}\,\varphi_1\vec{k}$ y derivando respecto al tiempo se obtiene

$\vec{v}_0 = \frac{d\vec{r}_O}{dt} = -4\omega_1\,\mathrm{sen}\,\varphi_1\vec{j} + 4\omega_1\cos\varphi_1\vec{k}$. En el instante considerado, $\omega_1 = 4\,rad/s$ y $\varphi_1 = 30^o$,

de donde $\vec{v}_0 = \frac{d\vec{r}_O}{dt} = -8\vec{j} + 8\sqrt{3}\vec{k}$

El punto P en su movimiento circular gira en sentido horario, por lo que en una posición genérica formará un ángulo con la horizontal de forma que el vector que une O y P es $\vec{r} = 2\cos\varphi_2\vec{j} + 2\,\mathrm{sen}\,\varphi_2\vec{k}$, y la velocidad relativa en un instante cualquiera es $\vec{v}_r = -2\omega_2\,\mathrm{sen}\,\varphi_2\vec{j} + 2\omega_2\cos\varphi_2\vec{k}$

En el instante considerado, $\varphi_2 = -270^o$ de forma que el sen $\varphi_2 = 1$, $\cos\varphi_2$ y $\omega_2 = -2$ rad/s debido a que gira en sentido horario . En el instante considerado, la velocidad relativa es $\vec{v}_r = 4\vec{j}$

El término $\vec{\omega} \wedge \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\cos\varphi_2 & 2\,\mathrm{sen}\,\varphi_2 \end{vmatrix} = -2\omega_1\,\mathrm{sen}\,\varphi_2\vec{j} + 2\omega_1\cos\varphi_2\vec{k}$, particularizado para el instante considerado proporciona $\vec{\omega} \wedge \vec{r} = -2\cdot 4\,\mathrm{sen}(-270^o)\vec{j} = -8\vec{j}$

En consecuencia, la velocidad de arrastre del punto es

$\vec{v}_{ar} = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge \vec{r} = -8\vec{j} + 8\sqrt{3}\vec{k} - 8\vec{j} = -16\vec{j} + 8\sqrt{3}\vec{k}$

Cálculo de aceleraciones

Aceleración relativa $\vec{a}_r = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d\ \ z}{dt^2}\vec{k}$

Aceleración de arrastre $\vec{a}_{ar} = \vec{a}_0 + \vec{\alpha} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})$

siendo $\vec{a}_0 = \frac{d\vec{v}_O}{dt} = \frac{d^2x_O}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y_O}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z_O}{dt^2}\vec{k}$, $\vec{r} = \vec{OP}$, $\vec{\omega}$ la velocidad de rotación del sistema móvil, en este caso, $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1$, $\vec{\alpha}$ la aceleración angular del sistema móvil en caso de que exista.

Como la velocidad angular de rotación del sistema móvil no es constante porque depende del tiempo (ω_1=2t rad/s), el sistema rota con aceleración angular siendo $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_1 = 2\vec{i}$

Aceleración de Coriolis $\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r$

La aceleración relativa[1] es

$$\vec{a}_r = \frac{d^2(2\cos\varphi_2\vec{j} + 2\,\mathrm{sen}\,\varphi_2\vec{k})}{dt^2} = 2(-\varphi_2''\,\mathrm{sen}\,\varphi_2 - \varphi_2'^2\cos\varphi_2)\vec{j} + 2(-\varphi_2''\cos\varphi_2 - \varphi_2'^2\,\mathrm{sen}\,\varphi_2)\vec{k}$$, y

teniendo en cuenta que φ_2'' es nula, la aceleración relativa en el instante considerado es $\vec{a}_r = -2(-2)^2\,\mathrm{sen}(-270^o)\vec{k} = -8\vec{k}$

El término $\vec{a}_0 = \frac{d\vec{v}_O}{dt} = (-4\varphi_1''\,\mathrm{sen}\,\varphi_1 - 4\varphi_1'^2\cos\varphi_1)\vec{j} + (4\varphi_1''\cos\varphi_1 - 4\varphi_1'^2\,\mathrm{sen}\,\varphi_1)\vec{k}$ en el instante considerado es

[1] Para calcular la aceleración relativa en un punto e instante concreto, no se puede derivar la velocidad relativa, porque su valor en dicho punto y ese instante es constante y la derivada es nula

$$\vec a_0 = \left(-4\cdot 2\cdot\frac{1}{2} - 4\cdot 16\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\vec j + \left(4\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 4\cdot 16\cdot\frac{1}{2}\right)\vec k = \left(-4-32\sqrt{3}\right)\vec j + \left(4\sqrt{3}-32\right)\vec k$$

Al existir aceleración angular del sistema móvil, el término

$$\vec\alpha \wedge \vec r = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ \varphi_1'' & 0 & 0 \\ 0 & 2\cos\varphi_2 & 2\,\mathrm{sen}\,\varphi_2 \end{vmatrix} = -2\varphi_1''\,\mathrm{sen}\,\varphi_2\,\vec j + 2\varphi_1''\cos\varphi_2\vec k$$ en el instante considerado es

$$\vec\alpha \wedge \vec r = -2\cdot 2\,\mathrm{sen}\left(-270^{o}\right)\vec j = -4\vec j$$

y el término

$$\vec\omega \wedge \left(\vec\omega \wedge \vec r\right) = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ \varphi'_1 & 0 & 0 \\ 0 & -2\varphi'_1\,\mathrm{sen}\,\varphi_2 & 2\varphi'_1\cos\varphi_2 \end{vmatrix} = -2\varphi_1'^2\cos\varphi_2 - 2\varphi_1'^2\,\mathrm{sen}\,\varphi_2\vec k$$, cuando t=2 toma

el valor $\vec\omega \wedge \left(\vec\omega \wedge \vec r\right) = -2(4)^2\,\mathrm{sen}(-270^{o})\vec k = -32\vec k$

La aceleración de arrastre[2] es la suma de los términos

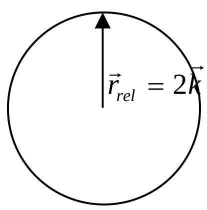
$$\vec a_{ar} = (-8-32\sqrt{3})\vec j + (4\sqrt{3}-64)\vec k$$

La aceleración de Coriolis es

$$\vec a_{Coriols} = 2\begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ \omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\omega_2\,\mathrm{sen}\,\varphi_2 & 2\omega_2\cos\varphi_2 \end{vmatrix} = 32\vec k$$

2º. Método. Descripción del movimiento que realiza el punto en el movimiento relativo y en el movimiento de arrastre y aplicación de las ecuaciones del movimiento correspondiente.

Movimiento relativo. El punto describe un movimiento circular de centro O con velocidad angular constante $\vec\omega_2 = -2\vec i$ y en consecuencia no tiene aceleración angular. El vector velocidad angular es un vector deslizante que pasa por O. **El vector de posición del punto P respecto a su centro O en el instante considerado es $\vec r_{rel} = 2\vec k$.**



Se aplican las ecuaciones del movimiento circular

[2] Para calcular la aceleración de arrastre en un punto e instante concreto, no se puede derivar la velocidad de arrastre, porque su valor en dicho punto y ese instante es constante y la derivada es nula

$$\vec{v}_r = \vec{\omega}_2 \wedge \vec{r}_a = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{j}$$

$$\vec{a}_r = \vec{\alpha}_2 \wedge \vec{r}_a - \omega_2^2 \vec{r}_{rel} = -4 \cdot 2\vec{k} = -8\vec{k}$$

Movimiento de arrastre. El sistema gira con velocidad angular no constante en torno al eje O_1X_1, y en consecuencia el punto P describe un movimiento circular con centro en un punto de dicho eje (punto O_1 por ejemplo) y velocidad angular $\vec{\omega}_1 = 2t\vec{i} = 4\vec{i}$ y aceleración angular $\vec{\alpha}_1 = 2\vec{i}$; el vector de posición del punto respecto al centro de la circunferencia que describe es $\overrightarrow{O_1P} = 4\cos 30\vec{j} + (4sen30 + 2)\vec{k}$

La velocidad y aceleración de arrastre corresponden a las del movimiento circular descrito

$$\vec{v}_{ar} = \vec{\omega}_1 \wedge \vec{r}_{ar} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4\cos 30 & (4sen30) + 2 \end{vmatrix} = -16\vec{j} + 8\sqrt{3}\vec{k}$$

La aceleración de arrastre es

$$\vec{a}_{arr} = \vec{\alpha}_1 \wedge \overrightarrow{O_1P} - \omega_1^2 \overrightarrow{O_1P} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4\cos 30 & (4sen30) + 2 \end{vmatrix} - 16\left(2\sqrt{3}\vec{j} + 4\vec{k}\right)$$

$$\vec{a}_{ar} = (-8 - 32\sqrt{3})\vec{j} + (4\sqrt{3} - 64)\vec{k}$$

La aceleración de Coriolis es

$$\vec{a}_{Coriols} = 2\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 32\vec{k}$$