Una esfera rueda sin deslizar por un plano inclinado que forma un ángulo φ con la horizontal y tiene una altura H. Calcular:

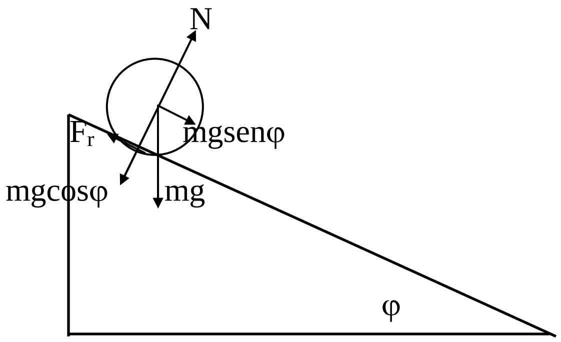
a) La aceleración de la esferab) La fuerza de rozamiento .

c) El máximo ángulo de inclinación en función del coeficiente estático μ_E, para que pueda rodar sin deslizar.

d) Velocidad en la parte inferior, por dos métodos diferentes. Si sólo hubiera deslizado la esfera, ¿cuál sería su velocidad en la parte inferior? .

Resolución

a) El diagrama de las fuerzas que actúan es el siguiente



Las ecuaciones son

$$mg\,\mathrm{sen}\,\varphi - F_r = ma \quad (1)$$

$$I_{GZ}\varphi'' = R \cdot F_r \quad (2)$$

$$a = R\varphi'' \; (3)$$

Sustituyendo valores en la ecuación (2) se tiene $\frac{2}{5}mR^2\varphi'' = R \cdot F_r$ de donde se deduce que la fuerza de rozamiento es $F_r = \frac{2}{5}ma$

La resolución de este sistema proporciona

$$F_r = \frac{2}{7}mg\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

b) Sustituyendo en la primera ecuación se obtiene

$$a = \frac{5}{7}g\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

c) Para que la esfera ruede sin deslizar se debe verificar que la fuerza de rozamiento sea menor o igual que la normal por el coeficiente de rozamiento, esto es $F_r < \mu_E mg\cos\varphi$, $\frac{2}{7}mgsen\varphi < \mu_E mgcos\varphi$por lo que $\mu_E > \frac{2}{7}\operatorname{tg}\varphi$ o bien $\operatorname{tg}\varphi = \frac{7}{2}\mu_E$

d1) Conociendo la aceleración del centro de gravedad $a_G = \frac{5}{7}g\operatorname{sen}\varphi$ y la distancia s que recorre hasta llegar a la parte inferior $s = \frac{H}{\operatorname{sen}\varphi}$, se puede calcular la velocidad al llegar al final de la rampa mediante la expresión $v_G = \sqrt{2a_G s}$; Sustituyendo estos valores en la ecuación de la velocidad se obtiene

$$v_G = \sqrt{2a_G s} = \sqrt{2\frac{5}{7}g\operatorname{sen}\varphi\frac{H}{\operatorname{sen}\varphi}} = \sqrt{\frac{10}{7}gH}$$

d2) Como la esfera rueda sin deslizar, la fuerza de rozamiento que actúa es estática, y por tanto no disipa energía; en este caso se cumplirá la conservación de la energía mecánica. En la parte superior de la rampa la esfera sólo tiene energía potencial y en la parte inferior tiene energía cinética (suma de la energía cinética de rotación y la energía cinética de traslación). Por tanto, al aplicar el teorema de la conservación de la energía mecánica

$$mgH = \frac{1}{2}I_G\omega^2 + m\frac{v_G^2}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mR^2\left(\frac{v_G}{R}\right)^2 + m\frac{v_G^2}{2} = \frac{7}{10}mv_G^2 \quad \text{de donde} \quad v_G = \sqrt{\frac{10}{7}gH}$$