P.R.1

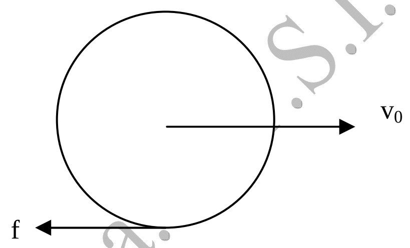
Una esfera homogénea de masa M y radio R tiene un movimiento de traslación sobre una mesa, con velocidad v_0 en el instante inicial t=0. Por efecto de la fuerza de rozamiento f con la superficie de la mesa, alcanza la condición de rodadura en el instante t_1 y en el instante t_2 llega al fina de la mesa y cae al suelo desde una altura h.

Calcular en función de f, M, R, v_0 y h las siguientes magnitudes

a) Aceleración angular y aceleración lineal del centro de gravedad durante el intervalo de tiempo $0 \le t \le t_1$

La esfera inicialmente únicamente desliza, sólo tiene velocidad v_0, que va disminuyendo debido a la fuerza de rozamiento, y va adquiriendo velocidad angular, de forma que la esfera rota y desliza sin que se cumpla la condición de rodadura.

La fuerza de rozamiento es $f = -Ma_G$, por tanto $a = -\frac{f}{M}$



Debido a que el cuerpo gira en torno al eje GZ, se cumple la ecuación fundamental de la dinámica de rotación $I_{GZ}\varphi'' = Rf$, por tanto $\frac{2}{5}MR^2\varphi'' = Rf$ de donde la aceleración angular es $\varphi'' = \frac{5f}{2MR}$. Esa es la aceleración angular mientras no se cumpla la condición de rodadura

b) Velocidad angular y velocidad lineal del centro de gravedad, en función del tiempo, durante el intervalo $0 \le t \le t_1$

Como sobre el cuerpo actúa la fuerza de rozamiento, a medida que transcurre el tiempo la velocidad de la esfera es menor y en un instante cualquiera t, la velocidad de la esfera

Dpto. Física y Mecánica. E.T.S.I. Agrónomos (UPM)

mientras no se cumpla la condición de rodadura es es $v = v_0 - at = v_0 - \frac{f}{m}t$ y la velocidad angular $\varphi' = \frac{5f}{2MR}t$

c) Tiempo t_1 que tarda en alcanzar la condición de rodadura

La velocidad del centro de gravedad es $v = v_0 - \frac{f}{m}t$, y tarda en verificar la condición de rodadura $v_G(t) = R\omega(t)$ un tiempo t_1, por lo que $v_G(t_1) = v_0 - \frac{f}{M}t_1 = R\frac{5f}{2MR}t_1$

de donde el tiempo $t_1 = \frac{2Mv_0}{7f}$

d) Espacio recorrido por el centro de gravedad en el intervalo de tiempo $0 \leq t \leq t_1$

El espacio recorrido en ese tiempo es $s = v_0 t - \frac{f}{2M}t^2$; particularizando para el instante t_1 es

$$s = v_0 \cdot \frac{2Mv_0}{7f} - \frac{f}{2M}\left(\frac{2Mv_0}{7f}\right)^2$$

e) Velocidad instantánea del punto I de la esfera que en cada instante está en contacto con la mesa y espacio recorrido por ese punto en el intervalo de tiempo $0 \leq t \leq t_1$

El punto I tiene una velocidad debida a la traslación La velocidad del punto de contacto es $v_I = v_0 - \frac{f}{M}t$

Y una velocidad debida a la rotación $R\varphi' = R\frac{5f}{2MR}t$, por lo que la velocidad del punto I es

$v_I = v_0 - \frac{f}{M}t - \frac{5f}{2M}t = v_0 - \frac{7f}{2M}t$. El espacio se obtiene por integración de la ecuación anterior $s_I = v_0 t - \frac{7f}{4M}t^2$

En el instante t_1 el espacio recorrido por I es la velocidad de I

$$s = v_0 \cdot \frac{2Mv_0}{7f} - \frac{7f}{4M}\left(\frac{2Mv_0}{7f}\right)^2 = \frac{Mv_0^2}{7f}$$

f) Aceleración angular y lineal, velocidad angular y lineal durante el intervalo $t_1 \leq t \leq t_2$

Dpto.Física y Mecánica. E.T.S.I. Agrónomos (UPM)

En el instante t_1 comienza la rodadura, considerándola como una rotación pura en torno al eje que pasa por I tenemos $I_{IZ}\varphi''=0$, por lo que la aceleración lineal y angular en ese intervalo es nula, y las velocidades lineales y angulares son constantes e iguales a $\omega=\omega(t_1)=\frac{5f}{2MR}\cdot\frac{2Mv_0}{7f}=\frac{5v_0}{7R}$ y $v_G=\frac{5v_0}{7}$

g) Trabajo realizado por la fuerza de rozamiento f en los intervalos de tiempo $0\le t\le t_1$ y $t_1\le t\le t_2$

En el intervalo de t=0 a $t=t_1$ el trabajo es el producto por la fuerza por el desplazamiento que ha experimentado el punto I, con signo negativo porque la fuerza de rozamiento actúa en sentido contrario al movimiento

$$W=-fe_I=-\frac{1}{7}Mv_0^2$$

En el intervalo de $t=t_1$ a $t=t_2$ la fuerza de rozamiento es estática y no realiza trabajo

h) Energía cinética de traslación y de rotación en los instantes t_1 y t_2

Energía cinética de traslación y de rotación en los instantes t_1 y t_2 es la misma por tener en esos instantes velocidad lineal y angular constantes.

En el instante t_1, la energía cinética de traslación es $E_c(t)=\frac{1}{2}Mv_{t_1}^2=\frac{1}{2}M\left(\frac{5}{7}v_0\right)^2=\frac{25}{98}Mv_0^2$ y la de rotación $E_c(r)=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}MR^2\right)\left(\frac{5v_0}{7R}\right)^2=\frac{5}{49}Mv_0^2$

i) Componentes x e y de la velocidad del centro de gravedad

La componente x de la velocidad del centro de gravedad es $v_x=v_G=\frac{5v_0}{7}$ y la componente y es $v_y=\sqrt{2gh}$

Dpto.Física y Mecánica. E.T.S.I. Agrónomos (UPM)