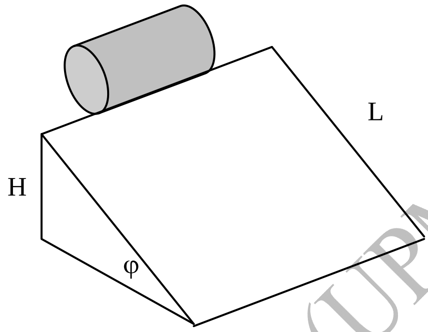
P.R.4



Un cilindro de masa M y radio R que rueda sin deslizar, partiendo del reposo, desde la parte superior de una rampa inclinada un ángulo respecto a la horizontal

a) Calcular la velocidad del centro de gravedad y su velocidad angular en el instante t_1 en que se encuentra al final de la rampa.

En lo alto de la rampa la energía mecánica se suma de la energía potencial MgH=MgL sen φ y la energía cinética que es nula. En la parte baja la energía cinética es

$\frac{1}{2}I_{IZ}\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{2}{3}MR^2\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{2}{3}Mv^2$ y la energía potencial es nula, por lo que

$MgL\,\mathrm{sen}\,\varphi = \frac{1}{2}\frac{3}{2}Mv_G^2$. La velocidad del centro de gravedad es $v_G = 2\sqrt{\frac{gL}{3}\mathrm{sen}\,\varphi}$. La velocidad angular es $\omega = \frac{2}{R}\sqrt{\frac{gL}{3}\mathrm{sen}\,\varphi}$

b) Calcular el número de vueltas que ha dado el cilindro hasta llegar al final de la rampa

El centro de gravedad recorre la distancia L, que es igual a n veces la longitud de la circunferencia descrita por el punto de contacto, por tanto n2πR; de donde n=L/2πR.

c) Calcular la energía cinética en el instante t_1

Cuando el cilindro llega al final de la rampa, la energía cinética es

$$\frac{1}{2}I_{IZ}\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{3}{2}MR^2\omega^2 = \frac{3}{4}Mv^2 = \frac{3}{4}M\,\frac{4}{3}gL\,\mathrm{sen}\,\varphi = MgL\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

d) Razonar si se ha conservado la energía mecánica durante el descenso por la rampa

Si se ha conservado puesto que rueda sin deslizar y actúa una fuerza de rozamiento estático en un punto que siempre está en reposo y por tanto no se disipa energía.

e) En un instante cualquiera del movimiento, t, calcular la velocidad del centro de gravedad, la velocidad del punto que se encuentre en contacto con la rampa, la velocidad angular, el momento cinético del cilindro respecto al eje de simetría y respecto a la generatriz e indicar si se conserva el momento cinético

En un instante cualquiera, el cilindro habrá descendido por el plano una distancia x por lo que la energía potencial es $Mg\,\mathrm{sen}\,\varphi(L-x)$ y la energía cinética

$\frac{1}{2}I_{IZ}\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{3}{2}MR^2\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{3}{2}Mv^2 = \frac{3}{4}Mv^2$. En la parte superior no tiene energía cinética y la energía potencial es $MgL\operatorname{sen}\varphi$

Se verifica la conservación de la energía mecánica, por tanto $Mg\operatorname{sen}\varphi(L-x)+\frac{3}{4}Mv^2 = MgL\operatorname{sen}\varphi$, de donde $v^2 = 2ax = \frac{4}{3}gx\operatorname{sen}\varphi$, la aceleración es $a = \frac{2}{3}g\operatorname{sen}\varphi$ y la velocidad es $v = \frac{2}{3}gt\operatorname{sen}\varphi$

La velocidad del punto que está en contacto con la rampa es nula. La velocidad angular es $\omega = \frac{2}{3R}gt\operatorname{sen}\varphi$

El momento cinético respeto al eje de revolución es

$$L_{GZ} = I_{Gz}\omega = \frac{1}{2}MR^2\omega = \frac{1}{2}MR^2\frac{2gt\operatorname{sen}\varphi}{3R} = \frac{MgR\ t\operatorname{sen}\varphi}{3}$$

y respecto a la generatriz $L_{IZ} = I_{Iz}\omega = \frac{3}{2}MR^2\omega = MgRt\operatorname{sen}\varphi$

No se ha conservado el momento cinético porque $\frac{dL_G}{dt} = R\cdot f \neq 0$. De la expresión

$\frac{dL_{GZ}}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{MgR\ t\operatorname{sen}\varphi}{3} = \frac{MgR\operatorname{sen}\varphi}{3} = R\cdot f$ se puede deducir la fuerza de rozamiento

de donde $\frac{Mg\operatorname{sen}\varphi}{3} = f$