P.R.7

Un cilindro hueco de paredes delgadas y una esfera maciza ruedan sin deslizar por un plano inclinado de longitud L=3m. El cilindro llega a la base 2.4 s después que la esfera.

Determinar el ángulo que forma el plano inclinado con la horizontal.

La esfera y el cilindro recorren el mismo espacio L=3 m en distinto tiempo, y con distinta aceleración (tanto lineal como angular); por tanto en ambos casos se verifica

$$L = \frac{1}{2}at^2$$

La energía cinética en la parte superior es nula y la energía potencial es $U = Mgh = MgL\operatorname{sen}\varphi$; en la parte inferior, la energía potencial es nula y la energía cinética es $\frac{1}{2}I_{IZ}\omega^2$ de donde se verifica $\frac{1}{2}I_{IZ}\omega^2 = MgL\operatorname{sen}\varphi$

En el caso de la esfera $\frac{1}{2}I_{IZ}\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{7}{5}MR^2\omega^2 = \frac{7}{10}Mv^2 = MgL\operatorname{sen}\varphi$ de donde $v^2 = \frac{10}{7}gL\operatorname{sen}\varphi = 2aL$, la aceleración es $a = \frac{5}{7}g\operatorname{sen}\varphi$. Como es un movimiento acelerado, el espacio recorrido L es $L = \frac{1}{2}at^2_{esfera} = \frac{5}{14}g\operatorname{sen}\varphi t^2_{esfera}$ y el tiempo es

$$t^2_{esfera} = \frac{14L}{5g\operatorname{sen}\varphi}$$

En el caso del cilindro hueco $\frac{1}{2}I_{IZ}\omega^2 = \frac{1}{2}2MR^2\omega^2 = Mv^2 = MgL\operatorname{sen}\varphi$, de donde

$v^2 = gL\operatorname{sen}\varphi = 2aL$, la aceleración es $a = \frac{1}{2}g\operatorname{sen}\varphi$. El espacio recorrido en el movimiento acelerado es $L = \frac{1}{2}at^2_{cilindro} = \frac{1}{4}g\operatorname{sen}\varphi t^2_{cilindro}$ y el tiempo es

$$t^2_{cilindro} = \frac{4L}{g\operatorname{sen}\varphi} = \left(t_{esfera} + 2.4\right)^2$$

La relación entre ambos tiempos es

$$\frac{t^2_{cilindro}}{t^2_{esfera}} = \frac{10}{7} = \frac{\left(t_{esfera} + 2.4\right)^2}{t^2_{esfera}} = \left(\frac{t_{esfera} + 2.4}{t_{esfera}}\right)^2 = \left(1 + \frac{2.4}{t_{esfera}}\right)^2$$

de donde el tiempo requerido por la esfera es $t_{esfera} = \dfrac{2.4}{\sqrt{\dfrac{10}{7}-1}} = 12.29s$ de donde el seno del ángulo es $\operatorname{sen}\varphi = \dfrac{14L}{5gt_{esfera}^2} = \dfrac{14\cdot 3m}{5\cdot 9.8\,\frac{m}{s^2}\cdot(12.29s)^2} = 0.00567$ y el ángulo es $\varphi = 0.325$

Calcular el tiempo que tardan en llegar el cilindro hueco y la esfera cuando el plano está inclinado un ángulo de 30º

En el caso de que el ángulo de inclinación del plano sea 30º, para el cilindro de verifica $t^2_{cilindro} = \dfrac{4\cdot 3m}{9.8\,\frac{m}{s^2}\,0.5} = 2.449\ \ s^2$ y para la esfera la esfera $t^2_{esfera} = \dfrac{14\cdot 3m}{5\cdot 9.8\,\frac{m}{s^2}\cdot 0.5} = 1.71\ \ s^2$ de donde los tiempos son $t_{cilindro} = 1.56\ s$ y $t_{esfera} = 1.31\ s$