P.R.8

Desde lo alto de un plano inclinado un ángulo φ ruedan sin deslizar un aro, un disco, una superficie esférica y una esfera, todos ellos de masa M y radio R. Calcular la relación entre los tiempos que tardan en llegar a la parte inferior del plano después de recorrer una distancia L.

Todos los cuerpos caen con aceleración angular y lineal constante y todos recorren la misma distancia $L = \frac{1}{2}at^2$. En todos los casos la energía cinética en la parte superior es nula y la energía potencial es $U = Mgh = MgL\operatorname{sen}\varphi$; en la parte inferior, la energía potencial es nula y la energía cinética es $\frac{1}{2}I_{IZ}\omega^2$ de donde se verifica $\frac{1}{2}I_{IZ}\omega^2 = \frac{1}{2}I_{IZ}\frac{v^2}{R^2} = MgL\operatorname{sen}\varphi$, por tanto $v^2 = 2aL = \frac{2MgLR^2\operatorname{sen}\varphi}{I_{IZ}}$, de donde el cuerpo recorre una distancia L con aceleración es

$$a = \frac{MgR^2\operatorname{sen}\varphi}{I_{IZ}}.$$

El espacio L se recorre en un tiempo t, que para cada cuerpo depende de su momento de inercia $L = \frac{1}{2}at^2 = \frac{MgR^2\operatorname{sen}\varphi}{2I_{IZ}}t^2$, y el tiempo es $t^2 = \frac{L2I_{IZ}}{MgR^2\operatorname{sen}\varphi}$

En el caso del aro, $I_{IZ} = 2MR^2$, $t^2 = \frac{L4MR^2}{MgR^2\operatorname{sen}\varphi} = \frac{4L}{g\operatorname{sen}\varphi}$

En el disco $I_{IZ} = \frac{3}{2}MR^2$, $t^2 = \frac{2L\frac{3}{2}MR^2}{MgR^2\operatorname{sen}\varphi} = \frac{3L}{g\operatorname{sen}\varphi}$

En la superficie esférica $I_{IZ} = \frac{5}{3}MR^2$ $t^2 = \frac{2L\frac{5}{3}MR^2}{MgR^2\operatorname{sen}\varphi} = \frac{10L}{3g\operatorname{sen}\varphi}$

Y en la esfera $I_{IZ} = \frac{7}{5}MR^2$, $t^2 = \frac{2L\frac{7}{5}MR^2}{MgR^2\operatorname{sen}\varphi} = \frac{14L}{5g\operatorname{sen}\varphi}$

De donde la relación es la siguiente $t_{aro} > t_{\sup erficie} > t_{disco} > t_{esfera}$