Un sistema de vectores deslizantes está formado por los siguientes vectores concurrentes:

$\vec{v}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} \quad |\vec{v}_1| = 2$

$\vec{v}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k} \quad |\vec{v}_2| = \sqrt{8} \quad x_2 = y_2$

$\vec{v}_3 = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k} \quad |\vec{v}_3| = \sqrt{27}$

$\vec{v}_4 = x_4\vec{i} + y_4\vec{j} + z_4\vec{k} \quad |\vec{v}_4| = \sqrt{14}$

Sabiendo que $\vec{v}_1$ es perpendicular al plano XOY; $\vec{v}_2$ es perpendicular al eje OZ; la recta soporte de $\vec{v}_3$ es la bisectriz del primer triedro; $\vec{v}_4$ es perpendicular al plano de ecuación 2x+4y+6z=0, y que los cuatro vectores tienen sus componentes positivas. Determinar:

a) Invariantes del sistema.

b) Vector momento mínimo.

c) Reducción del sistema en un punto cualquiera de su eje central.

d) Reducción en el punto M(0,1,0) , sabiendo que $\vec{C}_M = -8\vec{i} + 6\vec{k}$, a dos vectores, uno de ellos aplicado en M y el otro en un punto A de coordenadas (a,1,a-1) y cuyo módulo sea $\sqrt{29}$.

Resolución

Con las condiciones impuestas se obtiene el sistema de vectores.

El primer vector es perpendicular al plano XOY, es decir, es paralelo al eje OZ y su módulo es 2, por lo que $\vec{v}_1 = 2\vec{k}$.

El segundo vector es perpendicular al eje OZ, por lo que la componente z_2 es nula. El valor del módulo proporciona $\sqrt{2x_2^2} = \sqrt{8}; \;\; x_2 = y_2 = 2$.

La recta soporte del tercer vector es la bisectriz del primer triedro lo que implica que sus componentes son iguales; de su módulo se deduce $\sqrt{3x_3^2} = \sqrt{27}; \;\; x_3 = y_3 = z_3 = 3$.

Para calcular el cuarto vector imponemos la condición de paralelismo con el vector eje o vector característico del plano $\vec{E} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}$ (vector que representa dicho plano y es perpendicular a él),

$$\vec{P}_4 \wedge \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_4 & y_4 & z_4 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

Los menores complementarios proporcionan tres ecuaciones, cuya resolución, junto con el valor del módulo permite determinar las tres componentes,

$$\left.\begin{aligned} 3y_4 &= 2z_4 \\ z_4 &= 3x_4 \\ 2x_4 &= y_4 \end{aligned}\right\} \sqrt{14x_4^2} = \sqrt{14};\ x_4 = 1\ \ y_4 = 2\ \ \ z_4 = 3$$

El sistema de vectores y la resultante son de la forma:

$$\left.\begin{cases} \vec{v}_1 = 2\vec{k} \\ \vec{v}_2 = 2\vec{i} + 2\vec{j} \\ \vec{v}_3 = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k} \\ \vec{v}_4 = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} \end{cases}\right\} \ \vec{R} = 6\vec{i} + 7\vec{j} + 8\vec{k}$$

a) Invariantes:

$$\left|\vec{R}\right| = \sqrt{149}$$

$$\vec{C}_M \cdot \vec{R} = \vec{C}_O \cdot \vec{R} = 0$$

$$\frac{\vec{C}_M \cdot \vec{R}}{R} = 0$$

b) El vector momento mínimo es nulo (3ºinvariante es nulo): $\overrightarrow{C_{mın}} = \vec{0}$

c) Por ser nulo el segundo invariante, el sistema queda reducido a la resultante aplicada en cualquier punto del eje central.

d) Imponiendo las condiciones de la reducción para el punto M (0,1,0) siendo las coordenadas de A(a,1,a-1) se tiene:

1ªcondición: $\vec{C}_M \cdot \overline{A}\vec{M} = 0 \qquad -2a - 6 = 0 \Rightarrow a = -3;\quad A(-3,1,-4)$

2ª Condición $\ \vec{C}_M = \overline{M}\vec{A} \wedge \vec{P}$

$$-8\vec{i} + 6\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 0 & -4 \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix}$$

de donde se deduce $P_y = 2;\ -4P_x + 3P_z = 0;\ P_x = \dfrac{3}{4}P_z$

Debe cumplir la condición del módulo del vector, tomando componentes positivas se tiene:

$$\sqrt{(\frac{9}{16} + 1)P_z^2 + 4} = \sqrt{29};\ \ \frac{25}{16}P_z^2 = 25 \Rightarrow P_z = 4 \qquad P_x = 3$$

El sistema se reduce a:

$$\vec{P} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k} \qquad aplicado\ en\ \ A(-3,1,-4)$$

$$\vec{R} = 6\vec{i} + 7\vec{j} + 8\vec{k} \qquad aplicado\,en\,M\,(0,1,0)$$

$$-\vec{P} = -(3\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}) \quad aplicado\,en\,M\,(0,1,0)$$