Dado el sistema de vectores deslizantes

$\vec{P}_1 = -5\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ siendo $A_1(-1,-1,0)$ un punto de su recta soporte

$\vec{P}_2 = 3\vec{i} - 5\vec{j} - \vec{k}$ aplicado en el punto $A_2(2,0,1)$

$\vec{P}_3 = P_x\vec{i} + P_y j + P_z\vec{k}$ siendo $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z+1}{1}$ la ecuación de su recta soporte; todas las componentes del vector $\vec{P}_3$ son positivas, y su módulo es $\left|\vec{P}_3\right| = \sqrt{33}$

Calcular

a) Resultante general

b) Invariantes del sistema

c) Momento mínimo, calculando el módulo y vector

d) Ecuación del eje central

**e)** Calcular las componentes ($P_y$, $P_z$) que debe tener el vector $\vec{P}_3 = 1\vec{i} + P_y\vec{j} + P_z\vec{k}$ para que el momento resultante, respecto al origen de coordenadas, del sistema de vectores deslizantes sea paralelo al eje OX y comprobar que el nuevo módulo de $\vec{C}_O$ es 5. Considerar que el punto de aplicación del vector $\vec{P}_3$ es el mismo que en el caso anterior.

**Resolución**

De la ecuación de la recta soporte $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z+1}{1}$ del vector $\vec{P}_3$ se deduce que un punto de la misma es $A_3(2,-2,-1)$ y el vector director es paralelo al vector $4\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$; estableciendo la condición de paralelismo ente los vectores $\vec{P}_3$ y $4\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$

$\dfrac{P_x}{4} = \dfrac{P_y}{4} = \dfrac{P_z}{1}$ se obtiene $\left\{\begin{matrix} P_x = 4P_z \\ P_y = 4P_z \end{matrix}\right\}$ y estableciendo que el módulo es $\sqrt{33} = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2} = \sqrt{33P_z^2}$ se deduce que el vector es $\vec{P}_3 = 4\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$

a) La resultante del sistema es $\vec{R} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$

b) El primer invariante es el módulo de la resultante, por tanto

$$\left|\vec{R}\right| = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

El segundo invariante es el producto escalar de la resultante por el momento resultante respecto a un punto cualquiera. El momento resultante respecto al origen de coordenadas es

$$\vec{C}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 0 \\ -5 & 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -1 \\ 4 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 5\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$$

de donde el segundo invariante es $\vec{R} \cdot \vec{C}_O = 5 \cdot 2 + 1 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 8$

y el tercer invariante es el cociente entre el segundo invariante y el primero

$$\frac{R \cdot \vec{C}_O}{\left|\vec{R}\right|} = \frac{8}{2\sqrt{3}} = 4\frac{\sqrt{3}}{3}$$

c) El módulo del momento mínimo es el tercer invariante $C_{\min} = 4\frac{\sqrt{3}}{3}$, y vectorialmente es

$$\vec{C}_{\min} = C_{\min}\vec{u}_R = 4\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}}{2\sqrt{3}}\right) = \frac{4}{3}\left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right)$$

d) Calculamos el punto E del eje central mediante la expresión $O\vec{E} = \dfrac{\vec{R} \wedge \vec{C}_O}{\left|\vec{R}\right|^2}$

$\vec{R} \wedge \vec{C}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -6\vec{i} + 14\vec{j} - 8\vec{k}$, de donde el punto E tiene de coordenadas

$E\left(\dfrac{-1}{2}, \dfrac{7}{6}, \dfrac{-2}{3}\right)$, y la ecuación en forma continua del eje central es $x + \dfrac{1}{2} = y - \dfrac{7}{6} = z + \dfrac{2}{3}$

f) El momento del nuevo sistema de vectores deslizantes, respecto al punto O es

$$\vec{C}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 0 \\ -5 & 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & P_y & P_z \end{vmatrix} = (3 - 2P_z + P_y)\vec{i} + (6 - 2P_z)\vec{j} + (-16 + 2P_y)\vec{k}$$

Imponiendo la condición de que sea paralelo al eje OX, las componentes segunda $(6 - 2P_z)$ y tercera $(-16 + 2P_y)$ son nulas de donde las componentes del vector $\vec{P}_3$ son $P_y = 8$ $P_z = 3$.

Sustituyendo estos valores en el vector

$\vec{C}_O = (3 - 2P_z + P_y)\vec{i} + (6 - 2P_z)\vec{j} + (-16 + 2P_y)\vec{k} = (3 - 2 \cdot 3 + 8)\vec{i} = 5\vec{i}$ se demuestra que su módulo es 5.