Dado el sistema de tres vectores deslizantes:

$$\vec{P}_1 = a\vec{i} + b\vec{j} + \vec{k} \quad \textit{aplicado} \quad \textit{en} \quad A_1(1,0,1)$$

$$\vec{P}_2 = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k} \quad \textit{aplicado} \quad \textit{en} \quad A_2(0,1,2)$$

$$\vec{P}_3 = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \quad \textit{aplicado} \quad \textit{en} \quad A_3(0,0,0)$$

con las condiciones:

- El vector $\vec{P}_1$ es paralelo al plano de ecuación $\mathrm{x} - \mathrm{y} + 17 = 0$, de módulo $\sqrt{33}$, con $a > 0 \quad y \quad b > 0$.
- El vector $\vec{P}_2$ es paralelo al eje OZ, de módulo 3 con $r > 0$.

Determinar:

a) Vectores que forman el sistema y resultante general

b) Momento resultante respecto el origen de coordenadas y respecto al punto B(2,2,1)

c) Momento mínimo

d) Ecuación del eje central

Resolución

a) El primer vector debe satisfacer la condición de paralelismo con el plano de ecuación $\mathrm{x} - \mathrm{y} + 17 = 0$, lo que implica su perpendicularidad con el vector característico de dicho plano y por tanto producto escalar nulo, es decir

$$\vec{P}_1 \cdot \vec{E}_1 = 0; \;\; \vec{E}_1 = \vec{i} - \vec{j} \Rightarrow a - b = 0; \, a = b$$

El valor del módulo y la condición de que las componentes son positivas permiten obtener dicho vector,

$$\sqrt{33} = \sqrt{2a^2 + 1}; \;\; 2a^2 + 1 = 33; \;\; a^2 = 16 \Rightarrow a = b = 4$$

El vector $\vec{P}_2$ se obtiene de forma inmediata ya que es paralelo al eje OZ y tiene módulo 3. Por tanto, la primera y segunda componente son nulas, y la tercera vale 3 $p = q = 0; \;\; \vec{P}_2 = 3\vec{k}$

El sistema de vectores y su resultante son:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{P}_1 = 4\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k} \\ \vec{P}_2 = 3\vec{k} \\ \vec{P}_3 = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \end{array}\right\} \quad \vec{R} = 5\vec{i} + 5\vec{j} + 5\vec{k}$$

b) El momento resultante respecto al punto O, es la suma de los momentos respecto al punto O de cada uno de los vectores,

$$\vec{C}_O = \overline{O}\vec{A}_1 \wedge \vec{P}_1 + \overline{O}\vec{A}_2 \wedge \vec{P}_2 + \overline{O}\vec{O} \wedge \vec{P}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$$

El momento resultante respecto al punto B, se obtienen como la suma de los momentos respecto al punto B de cada uno de los vectores o bien por aplicación de la ecuación de cambio de centro de momentos,

$$\vec{C}_B = \overline{B}\vec{A}_1 \wedge \vec{P}_1 + \overline{B}\vec{A}_2 \wedge \vec{P}_2 + \overline{B}\vec{O} \wedge \vec{P}_3 = \vec{C}_O + \overline{B}\vec{O} \wedge \vec{R} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -2 & -1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\vec{C}_B = -6\vec{i} + 8\vec{j} + 4\vec{k}$$

c) El módulo del vector momento mínimo coincide con el tercer invariante. Multiplicando dicho módulo por un vector unitario de la misma dirección que la resultante, obtenemos dicho vector,

$$\left|\vec{C}_m\right| = \frac{\vec{C}_O \cdot \vec{R}}{R} = \frac{30}{\sqrt{75}} = 2\sqrt{3}$$

$$\vec{C}_m = \frac{30}{75}(5\vec{i} + 5\vec{j} + 5\vec{k}) = 2(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$

d) Se calcula un punto E perteneciente al eje central mediante la expresión,

$$\overline{O}\vec{E} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{C}_O}{\left|\vec{R}\right|^2} = \frac{5}{75}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{15}(\vec{i} - 5\vec{j} + 4\vec{k}); \quad \Rightarrow E(\frac{1}{15}, -\frac{1}{3}, \frac{4}{15})$$

La ecuación en forma continua del eje central es

$$\frac{x - \frac{1}{15}}{5} = \frac{y + \frac{1}{3}}{5} = \frac{z - \frac{4}{15}}{5}; \quad x - \frac{1}{15} = y + \frac{1}{3} = z - \frac{4}{15}$$