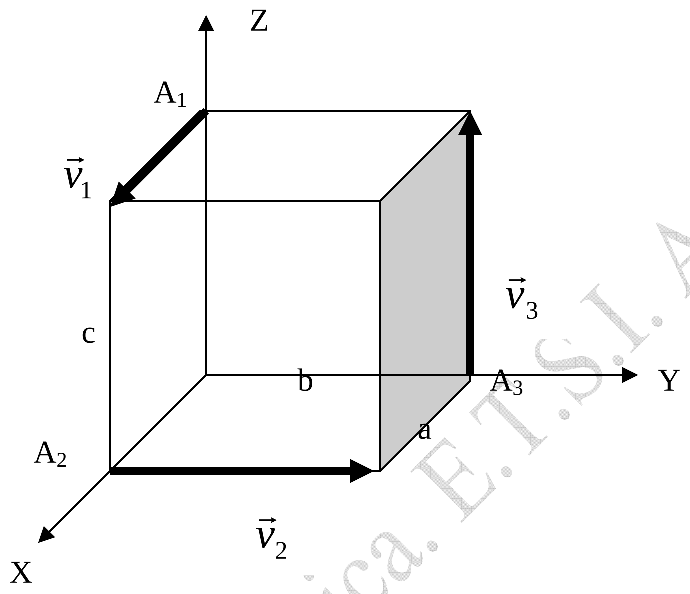
En un sistema de coordenadas cartesianas se tiene un paralelepípedo recto rectangular, contenido en el octante donde todas las coordenadas son positivas, con un vértice en el origen de coordenadas O y sus aristas concurrentes en éste, de dimensiones a, b y c, situadas en los ejes coordenados. Coincidiendo con otras tres aristas del paralelepípedo se encuentran los vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ (ver figura), los cuales forman un sistema de vectores deslizantes.



Calcular

a) Expresión en coordenadas cartesianas de los tres vectores y la resultante general.
b) Momento resultante respecto del punto O y respecto del vértice del paralelepípedo opuesto al O.
c) Momento mínimo
d) Ecuación del eje central.

Resolución

a) El vector $\vec{v}_1$, es paralelo al eje OX, tiene de módulo a, y su punto de aplicación está sobre el eje OZ a una distancia c del origen. $\vec{v}_1 = a\ \bar{i}$ $A_1(0,0,c)$

El vector $\vec{v}_2$ es paralelo al eje OY, tiene de módulo b, y su punto de aplicación está sobre el eje OX a una distancia a del origen . $\vec{v}_2 = b\vec{j}$ A_2 (a,0,0) .

El vector $\vec{v}_3$ es paralelo al eje OZ, tiene de módulo c, y su punto de aplicación está sobre el eje OY a una distancia b del origen. $\vec{v}_3 = c\vec{k}$ $\quad A_3(0,b,0)$

La resultante es $\vec{R} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$

b) El momento resultante respecto del punto O es

$$\vec{C}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = \vec{i}\,(bc) + \vec{j}\,(ac) + \vec{k}\,(ab)$$

y respecto del vértice del paralelepípedo opuesto al O, esto es el punto O'(a,b,c)

$$\vec{C}_{O'} = \vec{C}_O + O'\vec{O} \wedge \vec{R} = bc\vec{i} + ac\vec{j} + ab\vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} = bc\vec{i} + ac\vec{j} + ab\vec{k}$$

c) Momento mínimo

$$C_{\min} = \frac{\vec{R} \cdot \vec{C}_O}{|\vec{R}|} = \frac{3abc}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$, y expresado como vector

$$\vec{C}_{\min} = C_{\min} \cdot \vec{u}_R = \frac{3abc}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \cdot \frac{a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{3abc\left(a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}\right)}{a^2 + b^2 + c^2}$$

d) Para establecer la ecuación del eje central, en forma continua, es necesario conocer un punto del mismo;

$$\vec{R} \wedge \vec{C}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ bc & ac & ab \end{vmatrix} = \vec{i}\,(b^2a - c^2a) + \vec{j}\,(bc^2 - ba^2) + \vec{k}\,(a^2c - b^2c)$$

El punto E del eje central tiene por coordenadas $\left(\dfrac{b^2a - c^2a}{a^2 + b^2 + c^2}, \dfrac{bc^2 - ba^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \dfrac{a^2c - b^2c}{a^2 + b^2 + c^2} \right)$, y su vector director es la resultante