Un sistema está formado por los siguientes vectores deslizantes:

$$\vec{v}_1 = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$
$$\vec{v}_2 = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$
$$\vec{v}_3 = d\vec{i} + e\vec{j} + f\vec{k}$$
$$\vec{v}_4 = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$$

La línea de acción del primero pasa por el punto $P_1(3,2,1)$. El módulo del segundo es $\sqrt{6}$ y está situado en la recta x-1=2(1-y)=2z. La línea de acción del tercero, de módulo $\sqrt{6}$, pasa por el origen de coordenadas y sus cosenos directores cumplen las relaciones $\cos\alpha = -1/2\cos\beta = \cos\gamma$. La línea de acción del cuarto pasa por $P_4(1,1,2)$. Reducir en el origen de coordenadas.

Resolución

En primer lugar hay que calcular los vectores, la resultante y el momento resultante respecto al origen de coordenadas (que es el punto donde hay que hacer la reducción)

Del segundo vector se conoce su módulo y su recta soporte, x-1=2(1-y)=2z, que se puede expresar como $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-0}{1}$ *lo que nos indica que se puede conocer un punto de la misma $P_2(1,1,0)$ y su vector director* $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$*; por tanto el vector es*

$$\vec{v}_2 = \sqrt{6}\,\frac{\left(2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right)}{\sqrt{4+1+1}} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$

Del tercer vector se conoce el módulo y la relación entre sus cosenos directores; por otro lado se sabe que la suma de los cuadrados de los cosenos directores es la unidad, por lo que se puede expresar en función de uno de ellos (por ejemplo α) de la forma $\cos^2\alpha + 4\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ *de donde el* $\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$*; considerando como solución del vector la raíz positiva, se tiene que las componentes del vector son $v_x=1$, $v_y=-2$, $v_z=1$;* $\vec{v}_3 = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$

a) La resultante general es la suma de los cuatro vectores, por tanto

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}_1 = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \\ \vec{v}_2 = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \\ \vec{v}_3 = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} \\ \vec{v}_4 = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k} \end{array}\right\} \vec{R} = 5\vec{i} - 3\vec{j}$$

El momento resultante respecto al origen de coordenadas es

$$\vec{C}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + 8\vec{j} + 2\vec{k}$$

La resultante ni el momento resultante respecto al punto de la reducción son nulos, por tanto debemos sustituir el momento resultante por un par de vectores, de los cuales uno está aplicado en O y el otro en un punto A, que debe verificar $\vec{C}_O \cdot \overrightarrow{OA} = 0$ *por lo que las coordenadas del punto A deben verificar* $-3x + 8y + 2z = 0$*; si imponemos, por ejemplo la condición de que la coordenada x=0, las coordenadas y y z verifican* $z = -4y$ *. Si hacemos y=1, z=-4, por lo que el punto donde se aplica el vector* $\vec{P}$ *es A(0,1,-4); por otro lado se debe verificar* $\vec{C}_O = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{P}$*, esto es*

Dpto. Física y Mecánica. E.T.S.I. Agrónomos

$$-3\vec{i}+8\vec{j}+2\vec{k}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 1 & -4\\ P_x & P_y & P_z\end{vmatrix}$$ *, de donde* $$\begin{aligned}-3&=P_z+4P_y\\ 8&=-4P_x\\ 2&=-P_x\end{aligned}$$ *obteniéndose el valor de* P_x*=-2*

y una relación entre las compones P_y *y* P_z*; si damos arbitrariamente el valor de* P_y*=-1 se deduce que* P_z*=1.*

El sistema queda reducido a la resultante $\vec{R}=\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$ *aplicada en O*

El vector $-\vec{P}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ *aplicado en O*

El vector $\vec{P}=-2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ *aplicado en A(0,1,-4)*

Dpto. Física y Mecánica. E.T.S.I. Agrónomos