Dados los vectores:

$\vec{P}_1 = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ $\quad$ $A_1(1,0,1)$

$\vec{P}_2 = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ $\quad$ $A_2(-1,1,0)$

$\vec{P}_3 = -\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ $\quad$ $A_3(0,2,-1)$

siendo A_1, A_2 y A_3 puntos de sus rectas soportes, calcular:

a) Resultante general
b) Momento resultante respecto al origen de coordenadas y respecto a un punto cualquiera de coordenadas M(x,y,z)
c) Invariantes.
d) Lugar geométrico de los puntos del espacio respecto de los cuales el momento resultante es paralelo al eje OX
e) Ecuación del eje central
f) Reducir en el punto O' (1,1,1) a un vector y un par; uno de los vectores del par está aplicado en O' y el otro en un punto A tal que su coordenada “y” es doble de la coordenada “x”, siendo nula la coordenada “z”. Los vectores del par son perpendiculares al eje OZ

Resolución

a) La resultante general es $\vec{R} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$

b) El momento resultante respecto al origen de coordenadas es

$$\vec{C}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$$

El momento respecto a un punto genérico es, aplicando la ecuación del cambio de momentos

$$\vec{C}_M = -i - j - 2k + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -x & -y & -z \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}(-1 + 3z + y) + \vec{j}(-1 - 2z - x) + \vec{k}(-2 - 3x + 2y)$$

c) El primer invariante es el módulo de la resultante $|\vec{R}| = \sqrt{14}$*; el segundo invariante es el producto escalar de la resultante por el momento respecto a un punto cualquiera,* $\vec{R}\cdot\vec{C}_O = -2 - 3 + 2 = -3$*, y el tercer invariante es el cociente entre el segundo y primer invariantes* $\dfrac{\vec{R}\cdot\vec{C}_O}{|\vec{R}|} = \dfrac{-3}{\sqrt{14}}$

d) Para calcular el lugar geométrico de los puntos del espacio respecto de los cuales el momento resultante es paralelo al eje OX, consideramos un punto del espacio; si el momento resultante respecto a ese punto es paralelo al eje OX (es decir no tiene componente Y ni Z) dicho punto pertenece a la región solicitado. Es más cómodo hacerlo para un punto genérico, del cual ya hemos calculado el momento resultante. Los puntos que pertenezcan a esa región, su momento resultante no tiene componentes Y y Z. Por tanto en la ecuación forma

$\vec{C}_M = -\vec{i}\,(-1+3z+y)+\vec{j}\,(-1-2z-x)+\vec{k}\,(-2-3x+2y)$ *anulamos las dos últimas componentes, y nos proporciona la región solicitada, que la expresaremos como la intersección de dos planos*

$\Pi_1 \equiv -1-2z-x=0$

$\Pi_2 \equiv -2-3x+2y=0$

e) P*ara obtener la ecuación del eje central, necesitamos conocer la dirección del eje (que es la de la resultante) y un punto del eje que se determina por la expresión*

$$O\vec{E} = \frac{\vec{R}\wedge\vec{C}_0}{R^2} = x_E\vec{i} + y_E\vec{j} + z_E\vec{k}$$

De donde $\overrightarrow{OE} = \dfrac{1}{14}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{2}\vec{i} + \dfrac{5}{14}\vec{j} + \dfrac{1}{14}\vec{k}$ *, de donde la ecuación es*

$$\frac{x+\frac{1}{2}}{2} = \frac{y-\frac{5}{14}}{3} = \frac{z-\frac{1}{14}}{-1}$$

f) Para reducir en el punto O' (1,1,1) es necesario calcular el momento resultante respecto a dicho punto $\vec{C}_{O'} = 3\vec{i} - 4\vec{j} - 3\vec{k}$ *; La resultante ni el momento resultante respecto al punto de la reducción son nulos, por tanto debemos sustituir el momento resultante por un par de vectores, de los cuales uno está aplicado en O y el otro en un punto A(x_A,$2x_A$,0) que debe verificar* $\vec{C}_{O'}\cdot\overrightarrow{O'A} = 0$ *por lo que las coordenadas del punto A deben verificar* $3(x_A-1)-4(2x_A-1)-3(0-1)=0$ *o bien* $3x_A-3-8x_A+4+3=0$*, de donde* $x_A = \dfrac{3}{5}$ *e* $y_A = \dfrac{6}{5}$*;*

los vectores del par son perpendiculares al eje OZ, por lo que sólo tienen componente x e y; por otro lado se debe verificar $\vec{C}_{O'} = \overrightarrow{O'A}\wedge\vec{P}$*, esto es*

$3\vec{i} - 4\vec{j} - 3\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -1 \\ P_x & P_y & 0 \end{vmatrix}$*, de donde* $\begin{matrix} 3 = P_y \\ -4 = -P_x \end{matrix}$ *obteniéndose el valor de P_x=4 y P_y=3*

El sistema queda reducido a la resultante $\vec{R} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ *aplicada en O'*

El vector $-\vec{P} = -4\vec{i} - 3\vec{j}$ *aplicado en O'*

El vector $\vec{P} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ *aplicado en A(3/5, 6/5, 0)*